# Nichts

Kim J. Boström

Freiburg, Februar 1996

# Inhaltsverzeichnis

# Teil I

# Struktur aus dem Nichts

# Kapitel 1

# Gedanken

## 1.1 Nichts

Abbildung 1.1: Nichts.

Was Sie dort auf der Abbildung sehen, ist der Beginn und gleichzeitig das Ende all dessen, was ist. Was sehen Sie nämlich?

Nichts.

Wenn man annimmt, daß alles Seiende durch mindestens eine Eigenschaft ausgezeichnet ist, dann ist es diese eine Eigenschaft des Nichts: *nicht zu sein*. Und damit ist das Nichts das, was *nicht ist*, das *Nicht-Seiende*. Kann es das geben? Kann es wirklich etwas geben, was *nicht ist*? Diese Frage alleine beherbergt bereits einen Widerspruch, denn man fragt intuitiv: “kann es *etwas* geben, was nicht ist?” Und natürlich kann es nicht *etwas* geben, was nicht ist, sondern es kann eben nur *Nichts* geben, was nicht ist.

Nun, vielleicht sind es gerade diese merkwürdigen Widersprüche, in denen der menschliche Geist sich verheddert, warum das Nichts auch in den Anfängen der Mathematik nur eine Nebenrolle gespielt und meistens völlig gefehlt hat. Man findet zwar bereits bei den Altbabyloniern ein ≪Lückenzeichen≫, bestehend aus zwei übereinanderstehenden Winkelhaken. Aber diese frühe Form der Null bei den Altbabyloniern diente nur zur Festlegung der Stellen der Zahlelemente, die durch Keile und Haken symbolisiert wurden und eigentlich nicht, um wirklich jenes *Nichts* zu repräsentieren, was ich hier an den Anfang des Vortrags über Zahlensysteme stelle. Auch bei den Griechen gibt es keine Zahl Null. Sie wird erst in der Zeit von 300 v.Chr. bis 600 n.Chr. bei den Indern und Arabern zusammen mit einer dezimalen Notation entwickelt, die die Grundlage für unser heutiges Zahlsystem bildet. Weil nun die Geschichte menschlicher Ereknntnis nicht immer – man könnte eher sagen: fast nie – dem natürlichen Aufbau der Dinge folgt, will ich nicht der historischen Entwicklung der Zahlen folgen, sondern versuchen, buchstäblich aus dem *Nichts* heraus Zahlen entstehen zu lassen, die sich von den intuitiven ≪natürlichen≫ Zahlen bis hin zu den ≪Nichtstandard-Zahlen≫ eines hypervollständigen Körpers $\mathbb{R}^*$ entwickeln.

Was ist das Nichts in der neuzeitlichen Mathematik?
Der geläufigste Ausdruck für *Nichts* ist sicherlich der folgende:

$$0 \tag{1.1}$$

Um zu verstehen, was dieses Zeichen, das wir ≪Null≫ nennen, bedeutet, brauchen wir *Rechenregeln*. Da wir aber keine Rechenregeln entwickeln können, ohne *Zahlen* zu haben, mit denen wir rechnen, ist dieses Symbol im Augenblick noch sinnleer. Es gibt aber einen anderen Ausdruck für das Nichts, den wir jetzt schon formulieren können:

$$\emptyset \tag{1.2}$$

Dies ist keine Zahl, sondern ein *mengentheoretischer* Ausdruck. Man nennt ihn die ≪*leere Menge*≫. Um zu erfassen, was er wirklich bedeutet, müssen wir uns Gedanken über den Begriff der *Menge* machen. Das ist nicht so einfach, und es gab gerade in der Anfangszeit der Mengenlehre Unklarheit und Widersprüchlichkeiten in der Definition dieses zentralen Begriffes. Ich will darauf später zurückkommen. Halten wir zunächst nur fest: Dieser Ausdruck ≪$\emptyset$≫ symbolisiert das *vergegenständlichte Nichts*. Wir benötigen keine Rechenregeln oder einen Zahlenbegriff und wir müssen im Augenblick nicht einmal genau wissen, was eine *Menge* ist.

## 1.2 Etwas

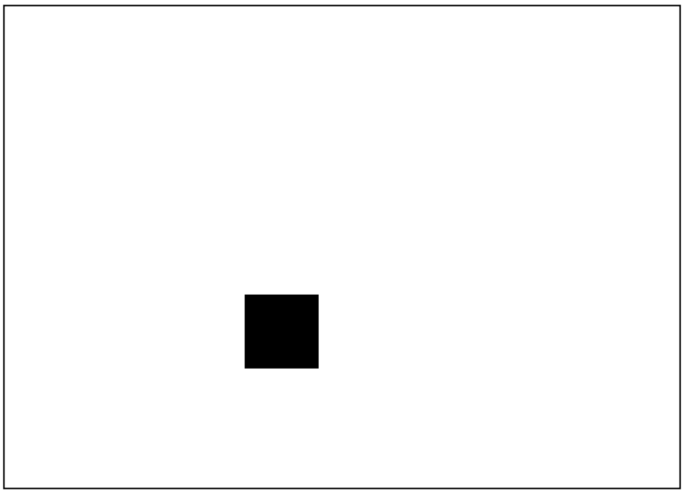

Abbildung 1.2: Etwas

Was Sie hier sehen ist die erste Form von Struktur, die überhaupt möglich ist. Sie sehen *Etwas*, das sich von dem es umgebenden *Nichts* unterscheidet. Oder auch kleingeschrieben: *Sie sehen etwas.* Vorher sahen Sie *nichts*. Der Inhalt der ersten Abbildung war nicht da, sie war leer, es war *nichts* drauf. Nun sehen Sie: Ahaa, es ist etwas drauf, *Etwas*...
Wenn es jedoch das Nichts nicht geben würde, so würde sich das Etwas nicht davon unterscheiden können. Ohne Unterscheidung ist aber keine Struktur möglich, ohne Struktur kann es nicht *Etwas* geben, es kann *Nichts* geben. Denn wenn das Etwas sich nicht vom Nichts unterschiede, wäre es identisch mit ihm. Das Nichts kommt ohne Struktur aus, das *Etwas* nicht. Es muß sich vom *Nichts* abheben, um zu existieren. Das *Nichts* ist somit die Voraussetzung für das *Etwas* und zugleich sein Komplement. Das sieht verdächtig aus. Eine Aussage, die ihr Komplement impliziert nennt man einen ’Widerspruch’. Liegt ein solcher hier vor? Haarscharf. Denn wenn wir formulierten ”Es gibt nichts.” und das ≪nichts≫ kleinschrieben, dann würde dies die Negation der Aussage ”Es gibt etwas” sein und mit der Erkenntnis, daß es nichts ohne nichts gibt, hätten wir einen Widerspruch der Form: ”Es gibt etwas, also gibt es nichts.” Zum Glück schreiben wir ≪Nichts≫ groß und meinen also: ”Es gibt das Nichts.”, welches sich gut mit ”Es gibt etwas” verträgt, wobei wir das ≪etwas≫ kleinschreiben dürfen, da wir gleich sehen werden, daß die Zulassung eines einzigen ≪Etwas≫ im Unterschied zum Nichts die Existenz alles anderen, also von überhaupt ≪etwas≫ ermöglicht.
Was soll das Groß- und Kleingeschreibe? Nun, es deutet an, daß es sich bei dem Objekt des Satzes um ein *Substantiv* handelt, was lateinisch in etwa *Gegenstand* bedeutet (sub-stare = standhalten, bestehen; substantia = Beschaffenheit, Wesen, Substanz, also ≪Substan-

tiv≫ als etwas Wesenhaftes, Be-stehen-des, Gegen-ständ-liches). Würden wir formulieren "Es gibt nichts.", so hätte ≪nichts≫ die Funktion der Negation des Prädikats ≪geben≫ und damit wäre aufgrund des sich ergebenden Widerspruches die Möglichkeit verbaut, daß es überhaupt ≪etwas≫ gibt. Das ≪Nichts≫ als *Gegenstand* ist aber offenbar der fundamentalste Gegenstand überhaupt, weil es dem Seienden die Grundlage vermittelt, von der es sich abhebt um zu sein, und gerade die Erkenntnis, daß es sich nicht einfach um die Negation von etwas Bestehendem, etwa einer Aussage handelt, sondern um ein eigenständiges Objekt, dem man also mithin *unabhängige Existenz* zuschreiben muß, weil man nämlich sonst in besagte logische Widersprüche gerät, öffnet uns die Möglichkeit der Existenz des Seienden. Da wir das *Etwas* aber nicht selbst unterschieden haben, kann es offenbar nicht mehrere *Etwasse* geben, genausowenig wie es mehrere *Nichtse* geben kann. Damit kommt für dieses *Etwas* auch der Begriff *Einheit* in Frage. Wir schreiben dafür z.B.

$$1 \tag{1.3}$$

In der Physik spricht man seltsamerweise von ≪Einheiten≫. Wie kann es nach unseren Überlegungen verschiedenerlei *Einheiten* geben? Der Begriff *Einheit* wird in diesem physikalischen Zusammenhang nicht als Grundlage *alles* Seienden gebraucht, sondern als Grundlage einer bestimmten *Qualität* des Seienden, etwa Gewicht, Länge, Zeit, etc... Dazu bedarf es bestimmter Unterscheidungen der Qualitäten voneinander, es liegt also bereits eine *Vielheit* vor, in deren jeder Klasse jeweils eine *Einheit* existiert. Die Vermischung der Klassen ergibt das Seiende. Doch im Augenblick beschäftigen wir uns nur mit der *Einheit* als solche. Die *Einheit* als das aus dem *Nichts* geborene, selbst strukturlose und doch in seiner Unterscheidung vom *Nichts* als Grundlage der Struktur bestehende.

Historisch kam die Erkenntnis eines *gegenständlichen Nichts* erst sehr spät. Wie gesagt, die Null als eigenständige Zahl wurde erst von den Indern und Arabern entwickelt und verwendet. Bei den Griechen wird sie nicht als *Zahl* gesehen. Und damit ist die Null auch nicht Teil der Welt, welche bei den Pythagoreern durch Zahlen und deren Verhältnisse aufgebaut wird. Euklid definiert: "Einheit ist das, wonach jedes Ding eines genannt wird." und später dann "Zahl ist die aus Einheiten zusammengesetzte Menge." Damit ist die Null als Repräsentant des eigentlichen – *aktualen* – Nichts weder Einheit noch aus Einheiten zusammengesetzt, also gar kein ≪Ding≫. Ins Zentrum aller Dinge rückt stattdessen die ≪Einheit≫. Nun behaupte ich, im Gegensatz dazu, daß die Grundlage alles Seienden, die substantielle – ≪substantivische≫ – Grundlage, nicht die Einheit, sondern das *Nichts* ist!

## 1.3 Vieles

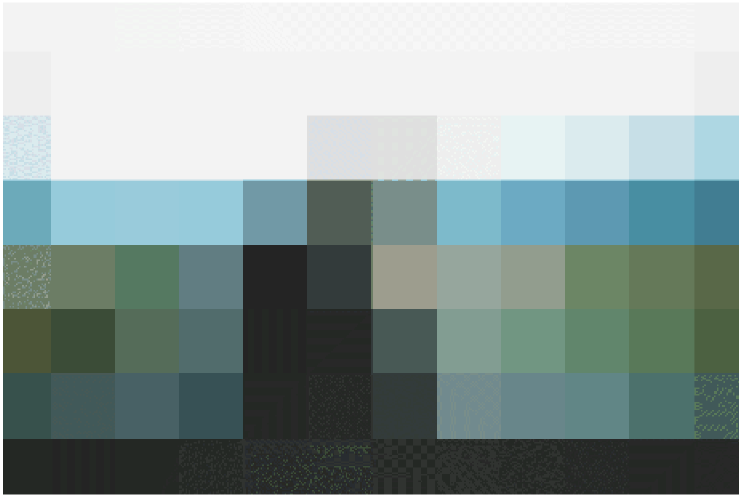

Abbildung 1.3: Vieles.

Nun, was ist das? Aus dem Nichts entsteht das Etwas, aus dem Etwas entsteht das Viele. Nichts, Einheit, Vielheit.
Die Einheit, die wir eben kennengelernt haben, war bei den Griechen die Grundlage der Dinge. Trotzdem gilt sie bei EUKLID und ARISTOTELES selbst nicht als *Zahl*, da sie nicht aus Einheiten zusammengesetzt ist, sie ist die "Grundlage des Zählens, der Ursprung der Zahl". Erst Vielfache der Einheit sind aus dieser Sicht *Zahlen*. Das deckt sich mit dem Wortsinn, denn *Zahl* rührt von *zählen* her. Bei ARISTOTELES heißt es: "Das, was in diskrete Teile zerlegbar ist, heißt *Vielheit*, und die begrenzte Vielheit heißt *Zahl*." Die natürlichen Zahlen ab 2 sind somit *Zahlen*, die rationalen Brüche sind Zahlen*verhältnisse*(aus:[ea83], S.11).

Kennzeichnend für die *Vielheit* im Gegensatz zum Nichts und zur Einheit, ist die *mannigfaltige Unterscheidung*. Wir wollen sie mit dem Begriff *Struktur* belegen. Auf jeder Stufe des Seienden kommt Struktur hinzu, die strukturlose Einheit unterscheidet sich vom strukturlosen Nichts und beides bildet *zusammen* – nicht jedes für sich! – eine Rudimentärstruktur. Nun strukturieren wir die Einheit in die Vielheit und dazu brauchen wir Instrumente. Die *Grundlage der Struktur* ist *Unterscheidung*, das *Mittel zur Unterscheidung* sind *Eigenschaften*. Was wir uns beschaffen müssen ist also eine Kombination aus Gegenständen der Vielheit, die wir *Objekte* nennen wollen, und Gegenständen der Unterscheidung, die wir *Eigenschaften* nennen wollen und die den Objekten zukommen. Daraus müßte sich im Grunde die Welt aufbauen lassen.

Nun, tatsächlich findet man in der neuzeitlichen Mathematik genau diese Überlegungen, die zu dem mächtigen System der *Mengenlehre* geführt haben und es ist tatsächlich möglich, die gesamte Mathematik ausschließlich auf ihr aufzubauen. Wir wollen uns bald mit einigen Grundlagen der Mengenlehre beschäftigen.

## 1.4 Alles

Abbildung 1.4: Alles.

Der Blick in die Alltäglichkeit offenbart uns nur die Details, die uns interessieren. Wir sind nicht gewahr, daß wir tatsächlich zu jeder Sekunde mit einer unendlichen Vielfalt an Informationen konfrontiert werden, von denen die allermeisten nicht in unser Bewußtsein gelangen. Auch auf diesem Bild stecken nicht wirklich *alle* Informationen, die die Wirklichkeit im Augenblick des Photographierens bereithielt. Das gilt insbesondere auch für die optische Wirklichkeit. Jede Photographie hat eine endliche Auflösung, unsere Netzhaut besitzt endlich viele Sehzellen. Wir sind imstande, die *Vielheit* zu erkennen, aber nicht imstande die *Allheit* zu erfassen. Es liegt an uns, ob wir der Allheit Gültigkeit zusprechen, obwohl wir nicht imstande sind, sie jemals zu erfassen. Wenn uns ein Objekt bei *beliebig genauer* Betrachtung *immer mehr mehr* Details liefert, so können wir vermuten, daß *eigentlich* unendlich viele Details darin enthalten sind. Aber ist diese Vermutung zulässig?

Ende letzten Jahrhunderts gab es eine Diskussion über die Existenz oder Nichtexistenz des *aktual Unendlichen*. Die Gedankengänge sind ähnlich: Ist es erlaubt, ein Quantum zuzulassen, welches in seiner *eigentlichen* Größe nicht erreichbar ist? In der Mathematik hat sich die Entscheidung *für* ein solch aktual Unendliches bewährt. Es sind mathematische Instrumente entwickelt worden, mit denen eine solche Monstrosität handhabbar wird. Ist das Faktum der Handhabbarkeit ausreichend, um die *Existenz* dieser Form der *Allheit* zu beweisen?

Im Zusammenhang mit dem aktual Unendlichen steht unmittelbar die Mengenlehre von Georg Cantor, der die "transfiniten Zahlen" im selben Atemzug wie die Mengenlehre konstruiert. Wir wollen nun verfolgen, wie wir vom Nichts über die Einheit zur Vielheit schließlich zur Allheit gelangen können, wenn wir uns dieser Methodik bedienen.

# Kapitel 2

# Axiomatik der Mengenlehre

Die Gegenstände der Vielheit, die *Objekte* der Mengenlehre, sind die *Mengen*. Es ist verrückt, aber wahr, daß man zur Konstruktion der Mengenlehre nicht wissen muß, *was* diese Mengen nun eigentlich sind.
Ernst ZERMELO hat 1908 ein Axiomensystem geschaffen, welches später durch FRAENKEL und SKOLEM ergänzt wurde und sich bis heute als widerspruchsfrei gehalten hat.

## 2.1 Existenz

So lautet das erste ZERMELOsche Axiom in der heute üblichen Formulierung:

**Axiom 1 (Existenzaxiom)** *Es gibt eine Menge.*

Nichts weiter. Es wird nicht gesagt, was diese Menge soll, wo sie her kommt und ob und inwiefern sie sinnvoll ist. Es wird einfach gesagt: *es gibt sie.*
Doch noch mehr: Diese Formulierung ist, wie sich zeigen läßt, im Zusammenhang mit den übrigen ZERMELOschen Axiomen tatsächlich *äquivalent* zu der Formulierung

**Axiom 1 (Ex)** *Es gibt die leere Menge* $\emptyset$.

in Übereinstimmung mit unseren Vorgedanken über das Nichts und das Etwas. In dem ich sage "Es gibt Etwas" sage ich "Es gibt das Nichts" und auch hier ist das Nichts gegenständlich – *substantivisch* –, symbolisiert durch das konkrete Zeichen $\emptyset$. Tatsächlich ist die Forderung der Existenz der leeren Menge das von ZERMELO *ursprünglich* formulierte Axiom. Man hat dann aus praktischen Gründen, um bestimmte Aussagen leichter ohne den Umweg über die leere Menge beweisen zu können, das Axiom in die Forderung nach der Existenz einer Menge überhaupt verwandelt. Ich möchte hier die ursprüngliche Formulierung übernehmen, und wir werden sehen, daß dies Sinn macht.

## 2.2 Eigenschaften

Über den Begriff der Menge sind viele schlaue Köpfe zerbrochen worden. Der Begründer der Mengenlehre, Georg CANTOR formulierte 1895 ([Mes74]):

> *Unter einer ≪Menge≫ verstehen wir jede Zusammenfassung $M$ von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten $m$ unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die ≪Elemente≫ von $M$ genannt werden) zu einem Ganzen.*
> *In Zeichen drücken wir dies so aus:*
>
> $$M = \{m\} \tag{2.1}$$

Darauf fußend hat Gottlob FREGE sein *Komprensionsaxiom* formuliert, das den Begriff der Menge eng mit dem Begriff der *Eigenschaft* verbindet:

**Axiom 2 (Komprehensionsaxiom)** *Zu jeder Eigenschaft $E$ existiert die Menge*

$$M_E := \{x \mid (x \textit{ ist Menge}) \wedge (E \textit{ trifft zu auf } x)\} \tag{2.2}$$

Eine Menge wird also definiert über die Eigenschaften der in ihr enthaltenen Objekte. Die Zusammenfassung von Objekten zu einer Menge entspricht der Erfassung ihrer Eigenschaften und umgekehrt. Es ist also gleichbedeutend, über die Eigenschaften der Objekte zu reden oder über die Mengen, in der sie enthalten sind. Da wir Eigenschaften als Mittel zur Unterscheidung betrachten, die Unterscheidung wiederum *Struktur* nannten, so ist die Mengenbildung also nichts anderes als die *Strukturierung der Einheit in die Vielheit*. Die vielen farbigen Felder auf der Abbildung versinnbildlichen diese Strukturierung. Jedem Feld wird eine Eigenschaft zugeordent, die es von den anderen Feldern unterscheidet, hier ist es die Farbe. Die Einheit selbst und das Nichts *hat keine Farbe*. Eigenschaft setzt Unterscheidung voraus und Unterscheidung benötigt Eigenschaft, in der unterschieden wird. Sie bedingen einander. Zurück zur Mengenlehre und zu Fregels Komprehensionsaxiom.
Leider ist gerade diese grundlegende Definition des Begriffs der *Menge* unhaltbar. Es ist verrückt, aber CANTOR und andere haben auf dieser fehlerhaften Vorstellung von der Menge eine Theorie entwickelt, die sich als Kandidat für die Grundlage der Mathematik schlechthin herausstellte. LESSING sagt trocken in den “theologischen Streitschriften”:

> *Gesetzt es gebe eine große nützliche mathematische Wahrheit, auf die der Erfinder durch einen offenbaren Trugschluß gekommen wäre; [...] leugnete ich darum diese Wahrheit, entsagte ich dann, mich dieser Wahrheit zu bedienen?*

Was ist nun also falsch an FREGES Axiom? Bertrand RUSSELL hat 1901 daraus einen Widerspruch konstruiert. Er definierte nämlich die *Menge aller Mengen, die sich nicht selbst enthalten.*:

$$M_R := \{x \mid (x \text{ ist Menge}) \wedge (x \notin x)\} \tag{2.3}$$

Frage: enthält sich $M_R$ nun selbst oder nicht?
Wir überprüfen die Möglichkeiten:

$$(1) \qquad M_R \in M_R \Rightarrow (M_R \text{ ist Menge}) \wedge (M_R \notin M_R) \tag{2.4}$$

Es folgt also insbesondere:

$$M_R \in M_R \Rightarrow M_R \notin M_R \qquad \natural \tag{2.5}$$

im Widerspruch zur Annahme. Nehmen wir nun an:

$$(2) \qquad M_R \notin M_R \Rightarrow (M_R \text{ ist nicht Menge}) \vee (M_R \in M_R) \tag{2.6}$$

Da $M_R$ nach Konstruktion Menge ist, folgt:

$$M_R \notin M_R \Rightarrow M_R \in M_R \qquad \natural \tag{2.7}$$

im Widerspruch zur Annahme.
Beide Aussagen ergeben zusammen:

$$M_R \in M_R \Leftrightarrow M_R \notin M_R \qquad \natural \tag{2.8}$$

Weil die Annahmen (1) und (2) komplementär sind, liegt ein unlösbarer Widerspruch der Form

$$A \leftrightarrow \neg A \tag{2.9}$$

vor.

In Umgangssprache hört sich das etwa so an:
$M_R$ ist die Menge aller Mengen. die sich nicht selbst enthalten. Wenn $M_R$ in $M_R$ enthalten ist, so ist nach Konstruktion $M_R$ nicht in $M_R$ enthalten. Wenn aber $M_R$ nicht in $M_R$ enthalten ist, ist nach Konstruktion $M_R$ in $M_R$ enthalten.

Oder:
Ein Barbier nimmt sich eines Tages vor, alle die und nur die zu rasieren, die sich nicht selbst rasieren. Wie weit kommt er nun, gesetzt er hätte genügend Rasierschaum und Ausdauer. Rasiert er sich nun selbst oder nicht?
Diese anschauliche Übersetzung der abstrakten Mengenantinomie in den Alltag stammt von Russell selbst(aus: [Hof88], S.33).

Vielleicht erscheint es Ihnen sinnlos, daß eine Menge sich selbst enthält. Aber stellen Sie sich z.B. einen Büroangestellten vor, der den Auftrag bekommt, alle in seiner Abteilung angefertigten Dokumente aufzulisten. Das ist kein absurder Auftrag und er dient der besseren Strukturierung. Nur leider wird der Angestellte die von ihm angefertigte Liste ebenfalls in

seine Liste aufnehmen müssen, denn sie ist zweifellos ein Dokument, daß in seiner Abteilung angefertigt wurde. Oder schlagen Sie ein Buch auf und suchen Sie die Inhaltsangabe. Müßte nicht konsequenterweise auch die Inhaltsangabe selbst darin aufgeführt sein? Und wieviele Computerprogramme werden so programmiert, daß sie sich selbst aufrufen. Es ist also durchaus sinnvoll, Mengen, die sich selbst enthalten, zuzulassen.
Wie wird nun die Antinomie gelöst? In ZERMELOs Axiomensystem wird jenes kritische Axiom ersetzt durch:

**Axiom 2 (Aussonderungsaxiom)** *Zu jeder Eigenschaft $E$ von Mengen und zu jeder Menge $x$ existiert eine Menge $y$, die genau aus den Elementen von $x$ besteht, welche die Eigenschaft $E$ haben.*
*Wir schreiben dafür:*

$$y = \{z \in x \mid E \textit{ trifft zu auf } z\} \tag{2.10}$$

Der Unterschied: Das Aussonderungsaxiom bezieht die Elemente aus *bereits vorhandenen Mengen*. So kann der Widerspruch aufgelöst werden:
Wir müssen die Russelsche Menge nun anders formulieren:

$$M_R := \{x \in y \mid (M_R \text{ ist Menge}) \wedge (x \notin x)\} \tag{2.11}$$

Gehen wir wieder die Möglichkeiten durch:

$$(1) \qquad M_R \in M_R \Rightarrow (M_R \in y) \wedge (M_R \text{ ist Menge}) \wedge (M_R \notin M_R) \tag{2.12}$$

Es folgt also insbesondere:

$$M_R \in M_R \Rightarrow M_R \notin M_R \qquad \natural \tag{2.13}$$

im Widerspruch zur Annahme. Nehmen wir nun an:

$$(2) \qquad M_R \notin M_R \Rightarrow (M_R \notin y) \vee (M_R \text{ ist nicht Menge}) \vee (M_R \notin M_R) \tag{2.14}$$

Da $M_R$ nach Konstruktion Menge ist, außerdem $M_R \notin M_R$ gilt, folgt:

$$M_R \notin M_R \Rightarrow M_R \notin y \tag{2.15}$$

In $M_R$ dürfen also keine Elemente aus Mengen enthalten sein, die $M_R$ enthalten. Damit ist $M_R$ nicht in sich selbst enthalten, in Übereinstimmung zur Voraussetzuung. Das ist alles. Schon löst sich der Widerspruch in Wohlgefallen auf. Es bedeutet nicht, daß es generell keine Mengen gibt, die $M_R$ enthalten, sondern nur das sich $M_R$ selbst sich nicht ihrer bedienen darf. Leider gibt es ein von VON NEUMANN 1925 formuliertes Axiom, welches generell Mengen ausschließt, die sich selbst enthalten. Um bestimmte Aussagen der Mengentheorie und der Spieltheorie beweisen zu können, ist dieses Axiom, das *Fundierungsaxiom* erforderlich. Aber der gewöhnliche Rahmen mathematischer Aussagen kommt ohne dieses

Axiom aus, so daß Inhaltsverzeichnisse, die sich selbst auflisten und Büroangestellte, die konsequente Inventur machen, erlaubt sind.
Unter Verwendung des Aussonderungsaxioms ist es möglich, den *Schnitt* zweier Mengen zu definieren:

$$X \cap Y := \{x \in X \mid x \in Y\} \tag{2.16}$$
$$= \{y \in Y \mid y \in X\} \tag{2.17}$$

und den allgemeinen Schnitt:

$$\bigcap X := \{a \in x \mid x \in X\} \tag{2.18}$$
$$= x_1 \cap x_2 \cap x_3 \cap \ldots \tag{2.19}$$
$$= \bigcap_{x \in X} x \tag{2.20}$$

## 2.3 Identität von Objekten

Das nächste Axiom definiert den Begriff der *Identität* zweier Mengen. Ein weiterer Wegbereiter der Mengentheorie, Richard DEDEKIND kam 1887 zu folgenden Gedanken[1] über die Identität von Dingen:

> *Ein Ding a ist dasselbe wie b (identisch mit b), und b dasselbe wie a, wenn alles, was von a gedacht werden kann, auch von b, und wenn alles, was von b gilt, auch von a gedacht werden kann.*

In der ZERMELOschen Axiomatik lautet das so:

**Axiom 3 (Extensionalitätsaxiom)** *Zwei Mengen, die die gleichen Mengen als Elemente enthalten, sind gleich*

An dieser Stelle wird deutlich, das nach ZERMELOs System Mengen die einzigen Objekte sind. In der *naiven* Mengenlehre CANTORs kommt der Begriff des *Urelements* vor. Die Zusammenfassung dieser Urelemente bildet die Mengen. Diese Unterscheidung wird in der ZERMELOschen Mengenlehre nicht getroffen. Es gibt keine Urelemente, alle Objekte werden als *Mengen* bezeichnet.
Es stellt sich nun folgende Frage: Mengen werden nach Axiom 2 durch die Eigenschaften ihrer Elemente definiert. Axiom 3 sagt, daß eine Menge genau dann identisch mit einer anderen ist, wenn sie bezüglich aller Elemente identisch ist. Das deutet nun daraufhin, als würde die Beschaffenheit einer Menge mit der Beschaffenheit ihrer Elemente *zusammenfallen*. Frage also: Sind die Eigenschaften einer Menge identisch mit den Eigenschaften ihrer Elemente?

[1] Richard Dedekind: “Was sind und was sollen die Zahlen”, Braunschweig 1887

Nein.
Betrachten wir die leere Menge, die wir als das *vergegenständlichte Nichts* bezeichneten. Wir sagten eingangs, das Nichts habe die Eigenschaft *nicht zu sein*. In Axiom 1 fordern wir aber: *Es existiere die leere Menge*. Das widerspricht sich doch offensichtlich. Jene Eigenschaft, nicht zu sein, trifft hingegen zu auf die *Elemente* der leeren Menge. Sie existieren nicht. Die leere Menge selbst *existiert* aber. Damit ist die Frage beantwortet, die Eigenschaften einer Menge werden zwar durch die Eigenschaften ihrer Elemente *festgelegt*, sie sind aber nicht unbedingt *identisch* mit ihnen. Die leere Menge ist also die Menge, die durch die Nichtexistenz ihrer Elemente festgelegt wird, einer Eigenschaft, die wir dem Nichts zugesprochen haben. Sie also ist jene Menge, die *das Nichts enthält*, nicht aber das Nichts selbst. Ein Objekt, dessen Beschaffenheit durch die Nichtexistenz seiner Bestandteile festgelegt ist, ein Objekt, das aus *Nichts* besteht, das wollen wir mit dem Ausdruck *vergegenständlichtes Nichts* bezeichnen.

## 2.4 Mannigfaltigkeit

Bislang können wir eine Menge durch die Eigenschaften der in ihr enthaltenen Elemente definieren und wir können sogar zwei Mengen miteinander vergleichen und feststellen, ob sie identisch sind. Das einzig Dumme: Wir haben bisher nichts als die leere Menge! Das garantiert uns Axiom 1. Mehr aber auch nicht. Die leere Menge schwebt in der Leere, die sie umfaßt, und es ist nichts außer ihr da, mit dem sie verglichen werden könnte. Wir wollen diesen traurigen Zustand nun ändern:

**Axiom 4 (Paarmengenaxiom)** *Zu je zwei Mengen $x$, $y$ gibt es eine Menge $z$, die genau $x$ und $y$ als Elemente besitzt:*

$$\exists z : \qquad z = \{x, y\} \qquad \forall x, y \tag{2.21}$$

*Wir identifizieren $\{x, x\} = \{x\}$ und nach Axiom 3 auch $\{x, y\} = \{y, x\}$.*

Nun ist es ganz leicht möglich, aus der leeren Menge weitere Mengen zu basteln: Man nehme die leere Menge, die es nach Axiom 1 gibt und bilde daraus die Menge, die die leere Menge enthält, was nach Axiom 4 erlaubt ist (indem man "zweimal" die leere Menge als "Paar" nimmt und zur Menge bündelt). Dann kann man wiederum eine Menge bilden, die die leere Menge und die Menge mit der leeren Menge enthält:

$$\emptyset \tag{2.22}$$

$$\emptyset,\ \{\emptyset\} \tag{2.23}$$

$$\emptyset,\ \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\emptyset\} \tag{2.24}$$

Nun habe ich vier Mengen. Mit zweien davon kann ich nach Axiom 4 wieder eine neue Menge basteln, wobei ich sechs Möglichkeiten der Paarbildung habe (zwei Paare verschiedener

und vier identischer Mengen), aber wobei ich stets elementgleiche Mengen gleichsetzen muß. Bei den sich ergebenden Menge kann ich wieder jeweils zwei zu einer neuen Menge zusammenfassen und so weiter und so weiter...
Nur haben die bisher zusammengebastelten Mengen einen Nachteil: sie haben alle höchstens 2 Elemente. Mehr Elemente sind nach Axiom 4 nicht zugelassen. Um noch mehr Elemente zu einer Menge bündeln zu können, benötige ich weitere Axiome:

**Axiom 5 (Vereinigungsmengenaxiom)** *Zu jeder Menge $X$ gibt es die Menge $Y$ der Elemente der Elemente von $X$. Wir schreiben:*

$$\exists Y : \qquad Y = \bigcup X \equiv \bigcup_{x \in X} x \qquad \forall X \tag{2.25}$$

Zum Beispiel gilt:

a) $\bigcup \emptyset = \emptyset$

b) $\bigcup \{\emptyset\} = \emptyset$

c) $\bigcup \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \{\emptyset\}$

d) $\bigcup \{x\} = x$

Das *Vereinigungsaxiom* ermöglicht das "Knacken" von Mengen, die in Mengen enthalten sind. Ihre Mengen"schale" wird aufgerissen und die Elemente fallen wie Kerne einzeln heraus. Und wieder ist die leere Menge die einzige, die sich daraus nichts macht – wie man in Beispiel 1 sieht. Sie ist "kernlos".
Man kann mit diesem Axiom auch die Vereinigung zweier Mengen $X, Y$ in der üblicheren Schreibweise $X \cup Y$ erreichen: Nach Axiom 4 kann man aus zwei existierenden Megen $X$ und $Y$ die Menge $Z = \{X, Y\}$ bilden. Dann ist nach Axiom 5 die Vereinigung von $Z$ erlaubt: $\bigcup Z = \bigcup \{X, Y\} = X \cup Y$, wobei die letzte Schreibweise gerade die Vereinigung der Elemente von $X$ und $Y$ zu einer neuen Menge beschreibt:

$$\bigcup \{X, Y\} = X \cup Y \tag{2.26}$$

$$= \{x \in X\} \cup \{y \in Y\} \tag{2.27}$$

$$= \{x_1, \ldots, y_1, \ldots\} \qquad x_i \in X, y_i \in Y \tag{2.28}$$

Für jede Menge gilt ja, daß sie die Vereinigung der Einermengen ihrer Elemente ist, also:

$$X = \bigcup_{x \in X} \{x\} \tag{2.29}$$

Daher ist auch die Vereinigung über $X$, also die Menge der Elemente der Elemente von $X$:

$$\bigcup X = \bigcup \bigcup_{x \in X} \{x\} \tag{2.30}$$

$$= \bigcup_{x \in X} x \qquad \text{siehe Beispiel d)} \tag{2.31}$$

Hat man mehrere Mengen, die man vereinigt, so läßt sich schreiben:

$$X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup \ldots = \bigcup_i X_i \tag{2.32}$$

Mit diesem Axiom ist es nun möglich auch mehrelementige Mengen zu konstruieren:
Sei $X = \{x_1, x_2\}$ und $Y = \{y_1, y_2\}$ mit $X \cap Y = \emptyset$. Dann ist

$$X \cup Y = \{x_1, x_2, y_1, y_2\} \tag{2.33}$$

eine Menge mit vier Elementen.
Trotzdem fehlt uns zur echten Vielfalt noch ein Axiom:

**Axiom 6 (Potenzmengenaxiom)** *Zu jeder Menge $x$ gibt es die Menge $Y$ aller Teilmengen von $X$, die sogenannte ≪Potenzmenge≫ von $x$. Wir schreiben:*

$$\exists y : \qquad y = \mathcal{P}(x) \qquad \forall x \tag{2.34}$$

Wie sieht das aus? Beispiel: Wir haben die Mengen $a, b, c$, die zusammen die Menge $M$ bilden. Die Potenzmenge von $M$ sieht dann wie folgt aus:

$$\mathcal{P}(\{a,b,c\}) = \big\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\big\} \tag{2.35}$$

Die Potenzmenge von $M$ enthält also die leere Menge, weil die leere Menge stets Teilmenge jeder Menge ist, sich selbst, weil jede Menge auch zugleich ihre eigene Teilmenge ist, alle ihre Elemente in Einermengen und alle Mengenkombinationen ihrer Elemente. Hier sind es Insgesamt 8 Elemente. Allgemein kann man zeigen daß die Mächtigkeit einer Potenzmenge (die Anzahl ihrer Elemente) mit der Mächtigkeit der potenzierten Menge wie folgt zusammenhängt:

$$|\mathcal{P}(M)| = 2^{|M|} \qquad ; \ |\cdot| = \text{Mächtigkeit von } \cdot \tag{2.36}$$

Mit diesen beiden Axiomen ist der Bann gebrochen. Es werden vielfältige Kombinationen aus mehrelementigen Mengen möglich, die alle verschieden voneinander sind und somit verschiedene Eigenschaften haben. Wie ich diese Eigenschaften nun sprachlich *bezeichne*, das bleibt meinem Einfallsreichtum überlassen. Tatsächlich *definieren* kann ich sie nur über die innere Struktur von Mengen. *Eigenschaften* hängen somit direkt mit der *inneren Struktur* ihres Trägers zusammen. Wenn ich nach den Eigenschaften eines Objektes frage, so muß ich seine innere Struktur enthüllen. Die *Tiefe* dieser Struktur, die für meine Betrachtungen relevant ist, bleibt der Zweckmäßigkeit überlassen. Allein ich weiß, daß *wenn* ich wirklich nach der *allerinnersten Struktur* frage, nach dem Bestandteil aller Bestandteile, werde ich auf die leere Menge geführt, in unserer Terminologie das *vergegenständlichte Nichts*. Deren Bestandteil wiederum ist das *Nichts* selbst. Der Bestandteil aller Bestandteile der Dinge, die ich bis jetzt bilden kann, ist somit das *Nichts*.

## 2.5 Unendliche Mannigfaltigkeit

Die Frage, die sich nun natürlich brennend stellt: Erschöpft das Nichts und seine elementaren Mengenkombinationen tatsächlich alles Seiende? Oder gibt es noch Objekte – in unserer Terminologie *Mengen* –, die von dieser Konstruktion nicht erfaßt werden? Bisher konnten wir auf der Basis der bisherigen Axiome nur feststellen:

> Vom Nichts ausgehend können wir eine mannigfaltige Existenz voneinander verschiedener Objekte konstruieren.

Was uns also noch fehlt ist die *Konstruktion des Konstruierbaren*. Dies ist uns bisher noch nicht möglich, denn ich kann zwar *beliebig viele* verschiedene Mengen konstruieren, aber ich kann nicht die Menge aller so konstruierbaren Objekte selbst bilden, weil zu jeder Menge $M$ konstruierter Objekte, die zwingend endlich ist, weil ich sie explizit angeben muß, immer noch ein weiteres Objekt konstruierbar ist, das nicht darin enthalten ist, nämlich z.B. die Menge $M'$, die aus allen Elementen von $M$ und $M$ selbst besteht und damit für jedes $M$ verschieden von M ist. Eine Menge, die diesem ein Ende macht, indem sie einfach alle einer in bestimmter Weise *konstruierbaren* Mengen zusammenfaßt, die eine unendliche Menge wäre, ist bisher nicht möglich. Wir brauchen ein neues Axiom:

**Axiom 7 (Unendlichkeitsaxiom)** *Es gibt eine ≪induktive Menge≫, das heißt, eine Menge $M_\infty$, die $\emptyset$ enthält und mit jedem $x$ auch die Menge, die alle Elemente von $x$ und $x$ selbst enthält. Wir schreiben:*

$$\exists M_\infty : \begin{cases} \emptyset \in M_\infty \\ x \in M_\infty \to (x \cup \{x\}) \in M_\infty \end{cases} \tag{2.37}$$

Diese bestimmte Art der *Induktivität* ist nicht wahllos. Wir werden im zweiten Abschnitt sehen, wie wir mit genau dieser Konstruktionsvorschrift zu den *natürlichen Zahlen* kommen und sogar noch darüber hinaus. Man sieht, daß eine derartige induktive Konstruktion tatsächlich nicht zu einem Ende führen kann und es daher nötig ist, eine Menge axiomatisch zu postulieren, in der diese Konstruktion zu einem Ende geführt *wird*, in der dann endlich alle konstruierbaren Mengen enthalten sind.
Immer noch brennt die Frage: Gibt es Mengen, die wir nicht konstruieren können, d.h. haben wir nun wirklich *Alles*? Und jetzt kommt der Kick:

1. Man nehme die leere Menge, die nach Axiom 1 existiert und nenne sie *erstes Element* $V_0$:
$$V_0 := \emptyset \tag{2.38}$$
2. Man bilde die Potenzmenge, die nach Axiom 6 existiert:
$$V_1 := \mathcal{P}(\emptyset) \tag{2.39}$$
3. Man bilde wieder die Potenzmenge:
$$V_2 := \mathcal{P}(V_1) \tag{2.40}$$
4. Man führe den Schritt 3 unendlich oft aus, d.h.:
$$V_{n+1} := \mathcal{P}(V_n) \tag{2.41}$$
5. Nach Axiom 7 gibt es eine Menge, die die so konstruierbaren Elemente enthält. Sie ist unendlich und man indiziert sie mit der *transfiniten Ordinalzahl* $\omega$, die wir im nächsten Abschnitt kennenlernen werden. Und zwar definiert man nun für diese Menge, daß sie die Vereinigung aller Vorgänger ist, was nach Axiom 5 erlaubt ist:
$$V_\omega := \bigcup_{n\in\omega} V_n \tag{2.42}$$
6. Nun fahre man wieder mit Schritt 3 fort bis zur nächsten Unendlichkeit und definiere wie in Schritt 5 die Grenzmenge als Vereinigung aller vorangehenden Mengen, allgemein also für jede Grenzmenge:
$$V_\alpha := \bigcup_{\beta\in\alpha} V_\beta \tag{2.43}$$

wobei die $\alpha$ und $\beta$ bis auf die natürlichen Zahlen transfinite Ordinalzahlen sind.
Man erhält eine *Hierarchie* an Mengen, die so beschaffen ist, das jede später konstruierte Menge alle Vorgänger enthält.
Diese Konstruktion einer Mengenhierarchie stammt von VON NEUMANN, der auch die erwähnten Ordinalzahlen konstruiert hat. Und zum Abschluß dieses Abschnitts kommt nun die unglaubliche aber beweisbare Aussage:

> *Für jede Menge, die mit dem Zermelo-Fraenkelschen Axiomensystem (ZF) verträglich ist, gibt es ein $V_\alpha$, dessen Element sie ist.*

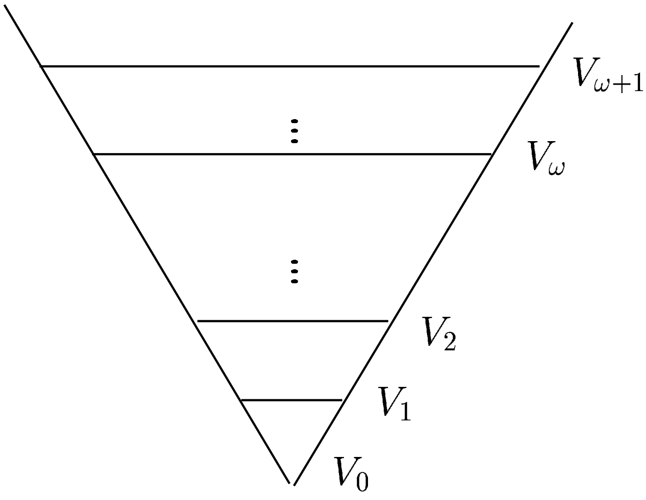


Abbildung 2.1: Hierarchie der Mengen nach von Neumannscher Konstruktion

Das bedeutet: Das Universum der Mengen wird von der von Neumannschen Hierarchie *ausgeschöpft*! Es gibt keine Menge, die nicht in ihr enthalten wäre, *keine einzige Menge*! Und der Ausgangspunkt dieser Hierarchie, der Bestandteil aller Bestandteile, ist die *leere Menge*, dessen Bestandteil wiederum das *Nichts* ist! Also haben wir tatsächlich das *Alles* aus dem *Nichts* konstruiert. Damit kommen wir wieder an den Anfang dieses Abschnitts zurück und sagen nun etwas konkreter:
Unter Zugrundelegung des ZF ist das Nichts Bestandteil aller Dinge, die wir *Mengen* nennen. Und da sich die Mathematik ganz auf der Mengenlehre aufbauen läßt, so ist es elementarer Bestandteil der Mathematik. Und weiter: Da sich die Physik der Sprache der Mathematik bedient und bisher keine Andeutung gefunden wurde, daß sich die Natur nicht ebenfalls dieser Sprache bedient, läßt sich radikalerweise sagen:
Die innerste Struktur alles Seienden ist die Struktur des Nichts, aus dem alles Seiende besteht und das selbst keine Struktur besitzt. Die Frage nach Zusammenhängen, die Frage nach Struktur ist nur sinnvoll, wenn man sie bis zu einer gewissen *Tiefe* stellt und wird am Ende so gegenstandslos wie das Nichts selbst.

# Teil II

# Zahlen und andere Konstruktionen

# Kapitel 3

# Natürliche und unnatürliche Zahlen

## 3.1 Natürliche Zahlen

Wir wollen damit beginnen, auf der Grundlage der bisherigen Axiome *Zahlen* zu konstruieren. Zunächst hat rein anschaulich *Zahl* etwas mit *Zählen* zu tun. Die uns bekannten Dezimalziffern der Araber verdeutlichen dies: Man erkennt ein Objekt und macht einen waagerechten Strich. Für das nächste Objekt macht man wieder einen Strich, dann wieder, und so fort. Durch schnelleres Schreiben bilden sich schließlich Symbole heraus.

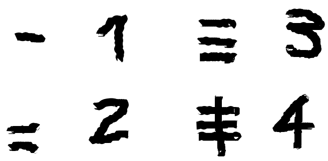

Abbildung 3.1: *Entstehung der arabischen Ziffern aus einfachen Zählstrichen.*

Wie läßt sich dieser Vorgang des Zählens nun mit den bisher bereitgestellten mengentheoretischen Werkzeugen modellieren? Nach von Neumann auf folgende Weise:

Man nimmt die leere Menge und nennt sie "Null". Dann nimmt man die Menge, die die leere Menge enthält und nennt sie "Eins". Dann faßt man beide Mengen zusammen zu einer Menge und nennt sie "Zwei". Dann faßt man alle bisherigen Mengen wieder zusammen und nennt diese Menge "Drei". Dies kann ich ohne Ende machen und erhalte auf diese Weise eine beliebige Anzahl voneinander verschiedener Mengen, wobei die jeweils vorhergehenden Mengen in der neu hinzukommenden enthalten sind.

$$0 := \emptyset \quad , \qquad 1 := \{\emptyset\} \quad , \qquad 2 := \big\{\emptyset, \{\emptyset\}\big\} \quad , \qquad \ldots \tag{3.1}$$

und allgemein:

$$n + 1 := n \cup \{n\} \tag{3.2}$$

Auf diese Weise ist es mir sogar möglich, eine *Ordnung* auf dieser Menge von Mengen zu schaffen. Eine Menge dieser konstruierten Mengen, die in einer anderen enthalten ist, nenne ich "kleiner".

$$n < m \leftrightarrow n \ \in \ m \tag{3.3}$$

Axiom 7 gestattet mir nun, alle so konstruierten "Zahlen" in einer Menge $\omega$ zusammenzufassen, denn wie man mit Blick auf ihre Definition sofort sieht, hat $\omega$ die beiden Eigenschaften einer *induktiven Menge*, deren Existenz mir das Axiom sichert: Es enthält die leere Menge und mit jeder Menge auch die Menge dieser Menge.
Die so konstruierten Zahlen gehorchen den PEANOschen Axiomen, welche die natürlichen Zahlen axiomatisch festlegen. Also nennen wir die in $\omega$ enthaltenen Zahlen einfach "natürliche Zahlen" und schreiben für $\omega$ auch $\mathbb{N}$. Die besagten Axiome benötigen eine "Zählfunktion" $S$ und sie legen sowohl $S$ als auch das Nullelement, welches als Initialzahl dient, und die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ auf folgende Weise fest:

**Definition 1 (Peano-Axiome)** *Die Menge $\mathbb{N}$ der ≪natürlichen Zahlen≫ und die Zählfunktion $S$ sind gegeben durch*

*i)* $0 \in \mathbb{N}$

*ii)* $n \in \mathbb{N} \rightarrow S(n) \neq 0$

*iii)* $n \in \mathbb{N} \rightarrow S(n) \in \mathbb{N}$

*iv)* $S(m) = S(n) \rightarrow m = n \quad \forall m, n \in \mathbb{N}$

*v)* $(0 \in E) \wedge (n \in E \rightarrow S(n) \in E) \rightarrow \mathbb{N} \subseteq E$

In unserem Zusammenhang eignen sich diese Axiome zur Festlegung der natürlichen Zahlen aber nicht, weil wir noch überhaupt nicht wissen, was eine "Funktion" ist. Dazu brauchen wir den Begriff der "Relation", den wir später formulieren werden.

## 3.2 Unnatürliche Zahlen

Nun gibt es eine erstaunliche Fortsetzung der auf diese Weise konstruierten natürlichen Zahlen. Wenn man nämlich die Menge $\omega$ selbst wieder als *Zahl* auffaßt, dann ist sie nach Konstruktion *größer als jede endliche Zahl* – endlich in dem Sinne, daß man die Zahl durch *endlich viele Schritte* konstruieren kann. Warum? Weil jede natürliche Zahl in $\omega$

enthalten ist, was nach der Ordnungsvorschrift gerade bedeutet, daß sie kleiner sind. Und man kann nun sogar Nachfolger von $\omega$ konstruieren, gemäß der alten Regel:

$$\omega := \{0, 1, 2, \ldots\} \tag{3.4}$$
$$\omega + 1 := \omega \cup \{\omega\} \tag{3.5}$$
$$\vdots \tag{3.6}$$
$$\omega + n := \big(\omega + (n-1)\big) \cup \big\{\omega + (n-1)\big\} \tag{3.7}$$

Und wieder erlaubt mir Axiom 7, eine Menge zu finden, die alle so konstruierten "übernatürlichen" Zahlen zusammenfaßt zu

$$\omega + \omega := \{1, 2, \ldots, \omega, \omega + 1, \ldots\} \tag{3.8}$$

Doch auch hier ist der Vorgang nicht abgeschlossen, ich kann ihn noch weiter fortsetzen:

$$2 \cdot \omega := \omega + \omega \tag{3.9}$$
$$2 \cdot \omega + 1 = (2 \cdot \omega) \cup \{(2 \cdot \omega)\} \tag{3.10}$$
$$\vdots \tag{3.11}$$
$$2 \cdot \omega + n = \big(2 \cdot \omega + (n-1)\big) \cup \{2 \cdot \omega + (n-1)\} \tag{3.12}$$
$$\vdots \tag{3.13}$$
$$3 \cdot \omega := 2 \cdot \omega + \omega \tag{3.14}$$
$$\vdots \tag{3.15}$$
$$n \cdot \omega = (n-1) \cdot \omega + \omega \tag{3.16}$$
$$\vdots \tag{3.17}$$

So komme ich wieder an eine Grenzmenge, die alle konstruierbaren "Vielfache" von $\omega$ zu einer Menge zusammenfaßt:

$$\omega \cdot \omega := \underbrace{\omega + \ldots + \omega}_{\omega} \tag{3.18}$$
$$\tag{3.19}$$

Wieder kann ich diese Menge als Zahl auffassen und so weiter und so fort...
Die Untermengen von $\omega$ haben wir *natürliche Zahlen* genannt, $\omega$ selbst ist also die Menge der natürlichen Zahlen. Als Zahl interpretiert ist $\omega$ per Konstruktion keine natürliche Zahl, weil keine der konstruierten Mengen in sich selbst enthalten ist. Vielmehr ist sie eine *transfinite Ordninalzahl*, genau wie ihre Nachfolger. Man muß sie unterscheiden von den *transfiniten Kardinalzahlen*, deren Konstruktion anders ist.

Was wir oben getan haben, sieht ein wenig nach *Rechnen* aus. Wir haben ein Pluszeichen und ein Minuszeichen benutzt. Dabei wissen wir noch gar nicht, was das ist, weil wir auch hier den Begriff der *Relation* brauchen, den wir noch nicht eingeführt haben. Es war auch kein Rechnen, sondern es sollte der *Nachfolger* oder der *Vorgänger* einer konstruierten Zahl symbolisiert werden. So symbolisiert z.B. die suggestive Schreibweise $n-1$ den Vorgänger von $n$ und $\omega+1$ den *Nachfolger von* $\omega$, nicht aber die Addition der Zahlen $\omega$ und 1. So ist zum Beispiel der Ausdruck $1+\omega$ hier gar nicht definiert, genausowenig wie $1+n$.

Der Grund, warum die Ordinalzahlen so heißen, liegt sehr grob gesprochen darin,

daß sie vermittels einer Ordnung erzeugt werden. Die Ordnung einer Zahlenmenge legt die Beschhaffenheit ihrer Ordinalzahlen fest. Die Konstruktionsvorschrift der von Neumannschen Zahlenreihe liefert die Ordnungsvorschrift. Man kann in gewisser Weise die Ordinalzahlen mit der Ordnung selbst identifizieren, der Schöpfer des Begriffes der "Ordinalzahl", Georg Cantor, hat dies in sehr abstrakter Weise getan, indem er den "Ordnungstyp" einer Menge wie folgt definierte[1]:

> *Jeder geordneten Menge M kommt ein bestimmter ≪Ordnungstypus≫ [...] zu [...]; hierunter verstehen wir den Allgemeinbegriff, welcher sich aus M ergibt, wenn wir nur von der Beschaffenheit der Elemente abstrahieren, die Rangordnung unter ihnen aber beibehalten.*

Den Ordnungstyp von "wohlgeordneten Mengen" nennt Cantor eine ≪Ordnungszahl≫. Die von Neumannschen Zahlen bilden eine "wohlgeordnete Menge", was bedeutet, das jede ihrer nichtleeren Teilmengen ein minimales Element besitzt, d.h. es gibt zu jedem Element immer einen unmittelbaren Nachfolger. Die transfiniten Ordnungszahlen besitzen jedoch nicht immer einen unmittelbaren *Vorgänger*! Man tut sich schwer, z.B. den Vorgänger von $\omega$ zu finden, vor allem, wenn man darüber meditiert, ob er eine natürliche Zahl ist oder nicht!...

Tatsache ist jedenfalls, daß der Vorgänger von $\omega$ weder eine natürliche Zahl ist, noch *keine* natürliche Zahl ist, weil es diesen Vorgänger nämlich ganz einfach *nicht gibt.* Solche Elemente einer wohlgeordneten Menge nennt man ≪Limeselemente≫ und es gibt einen ganzen Haufen davon in der von Neumannschen Zahlenreihe.

Das bedeutet auch, daß es hoffnungslos ist, auf dieser Zahlenreihe so etwas wie "Subtraktion" einzuführen, geschweige denn aus ihm einen *Körper* zu machen.

Die von Neumannschen Zahlen haben also leider keinen "Nutzen", weil wir nicht vernünftig mit ihnen *rechnen* können. Aber es sind immerhin *Zahlen*, weil sie unmittelbar mit dem Begriff des "Zählens" verbunden sind, ja direkt aus ihm hervorgehen. Dennoch werden wir schließlich auch einen Körper finden, in welchem unendliche Zahlen enthalten sind, den *hypervollständigen* Körper $^*\mathbb{R}$.

[1] Georg Cantor "Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre"

## 3.3 Das potential und das aktual Unendliche

Ordinalzahlen können zwar unendlich sein, es gibt aber noch andere ihrer Art: die "nichtarchimedeschen Zahlen". Diese Zahlen heißen so, weil sie sich nicht an das *Archimedesche Axiom* halten. Dieses Axiom bezieht sich, wie fast alles bei den Griechen, auf Längen von Strecken und besagt([Hah88], S.11):

> **Axiom des Archimedes:** *Sind zwei Strecken gegeben, so gibt es stets ein Vielfaches der ersten, das größer als die zweite ist.*

Mit anderen Worten

$$\exists n : \qquad n \cdot a > b \qquad \forall a, b \tag{3.20}$$

Wenn man dieses Axiom außer Kraft setzt, so gelangt man zu den *nichtarchimedeschen Zahlen.* Man kann damit rechnen und beispielsweise Geometrie betreiben, in der eben auch *unendlich kleine* und *unendlich große* Strecken erlaubt sind. Die *nichtarchimedeschen Zahlen* sind etwa zur selben Zeit, in der CANTOR an seinen transfiniten Zahlen gearbeitet hat, von dem italienischen Mathematiker VERONESE entwickelt worden[2]. Jedoch hat CANTOR diese Zahlen scharf kritisiert, er schreibt [3] im Zusammenhang mit einigen Gedanken über die "Gleichheit von Zahlen":

> *Nachdem Herr Veronese auf solche Weise das unentbehrliche Fundament für die Vergleichung von Zahlen sozusagen freiwillig preisgegeben hat, darf man sich über die Regellosigkeit nicht wundern, in welcher er des weiteren mit seinen pseudotransfiniten Zahlen operiert und den letzteren Eigenschaften zuschreibt, die sie aus dem einfachen Grunde nicht besitzen können, weil sie, in der von ihm fingierten Form, selbst keinerlei Existenz, es sei denn auf dem Papiere, haben. Auch wird hiermit die auffallende Ähnlichkeit verständlich, welche seinen Zahlbildungen mit den höchst absurden "unendlichen Zahlen" Fontenelles in desssen 'Geometrie de l'infini' anhaftet.*

Cantor schießt nach allen Seiten, um Platz zu schaffen für "seine" transfiniten Zahlen. Dabei wird er selbst auf das heftigste angegriffen, vor allem von KRONECKER, der Cantor im Berliner mathematischen Seminar einen "Verderber der Jugend" nannte.
Der Streit geht vor allem um die Begriffe des *potential* und dss *aktual Unendlichen.* Cantor umreißt die Begriffe, die er selbst auch stellenweise als das *uneigentlich-* und das *eigentlich-Unendliche* bezeichnet, folgendermaßen[4]

[2] G. Veronese "Grundzüge der Geometrie von mehreren Dimensionen und mehreren Arten geradliniger Einheiten", Leipzig, (Teubner) 1894

[3] G. Cantor: "Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre

[4] Georg Cantor "Zur Lehre vom Transfiniten. Gesammelte Abhandlungen aus der Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik. Erste Abteilung" (Halle, 1890): 'Über die verschiedenen Standpunkte in bezug auf das aktuelle Unendliche'

> *Trotz wesentlicher Verschiedenheit der Begriffe des ≪potentialen≫ und des ≪aktualen≫ unendlichen, indem ersteres eine veränderliche endliche, über alle Grenzen hinaus wachsende Größe, letzteres ein in sich festes, konstantes, jedoch jenseits aller endlichen Größen liegendes Quantum bedeutet, tritt doch leider nur zu oft der Fall ein, daß das eine mit dem anderen verwechselt wird.*

Auch das aktual Unendliche selbst unterliegt noch einmal einer Unterscheidung. Cantor legt Wert darauf, wie seine transfiniten Zahlen, als Repräsentanten aktualer Unendlichkeit, zu verstehen sind, damit keine mathematischen Inkonsistenzen und Absurditäten auftreten:

> *Eine andere häufige Verwechslung geschieht mit den beiden Formen des aktualen Unendlichen, indem nämlich das ≪Transfinite≫ mit dem ≪Absoluten≫ vermengt wird, während doch diese Begriffe streng geschieden sind, insofern ersteres ein zwar unendliches, aber doch noch Vermehrbares, das letztere aber wesentlich als unvermehrbar und daher mathematisch undeterminierbar zu denken ist.*

Gegen das aktual Unendliche stellen sich immerhin so erhabene Größen wie GAUSS und CAUCHY, dafür sprechen aber z.B. BOLZANO und PASCAL. Auch das *unendlich Kleine* wird heftig umstritten. Manche Mathematiker verstehen den Umgang mit den *Differentialen* als Rechnen mit unendlich kleinen Größen, so auch z.B. Leonhard EULER. Andere verstehen sie als *endliche, jedoch beliebig kleine* Größen. Die letztere Ansicht setzt sich schließlich durch und eine Methodik, die als "Epsilontik" bezeichnet wird, wird entwickelt. Danach werden die infinitesimalen Größen aus der Mathematik verbannt und durch eine *beliebig kleine, reelle Zahl* $\epsilon$ ersetzt und anstatt infinitesimale Größen in bestimmte Ausdrücke einzusetzen, wird ein *Grenzübergang* gemacht, in dem dieses $\epsilon$ gegen Null strebt. Es zeigt sich, daß man damit alles zeigen kann, also wird die Existenz unendlich kleiner Größen verworfen. Die erste "epsilontische" Definition der Stetigkeit z.B. Anfang des 19. Jahrhunderts stammt von Bernard BOLZANO und lautet[5]:

> *Nach der richtigen Erklärung versteht man unter der Redensart, daß eine Funktion $f(x)$ nach dem Gesetz der Stetigkeit sich ändere, nur soviel, daß wenn irgendein $x$ ein solcher Wert ist, der Unterschied $f(x+\epsilon)-f(x)$ kleiner als jede gegebene Größe gemacht werden könne, wenn man $\epsilon$ so klein als man nur will annehmen kann.*

Doch wollen wir die Diskussion über das Unendliche zunächst abbrechen, um noch einige wichtige Hilfsmittel bereitzustellen.

[5]gefunden in: "Paradoxien des Unendlichen" (dtv), S.10

# Kapitel 4

# Relationen, Funktionen und Ordnungen

Wir haben *Zahlen* entwickelt und auf ihnen eine *Ordnung* erklärt. Diese *Ordnung* ist eine sogenannte *binäre Relation* zwischen den Zahlen. Benötigen wir jetzt ein neues Axiom, etwa die Existenz von Relationen? Nein, auch die Relationen kann man durch Mengen ausdrücken. Man legt nämlich fest:

**Definition 2 (Relation)** *Ein Objekt $a$ steht genau dann in (binärer) Relation $R$ zu einem Objekt $b$, wenn $R$ eine Menge geordneter Paare ist und $(a, b)$ darin enthalten ist. Wir schreiben:*

$$a \overset{R}{\sim} b \Leftrightarrow (a, b) \in R \tag{4.1}$$

Tja, wir wissen aber noch nicht, was ein *georndetes Paar* ist, denn Mengen sind ungeordnet. Doch ist es auch hier möglich, eine rein mengentheoretische Definition für geordnete Paare zu finden:

**Definition 3 (Geordnetes Paar)** *Ein ≪geordnetes Paar≫ aus zwei Elementen $a$ und $b$ ist definiert durch:*

$$(a, b) := \big\{\{a\}, \{a, b\}\big\} \tag{4.2}$$

*so daß gilt:*

$$(a, b) = (a', b') \leftrightarrow (a = a') \wedge (b = b') \tag{4.3}$$

Und davon ausgehend definiert man:

$$\begin{aligned} &\text{Tripel:} && (a, b, c) := ((a, b), c) && (4.4)\\ &\text{Quadrupel:} && (a, b, c, d) := ((a, b, c), d) && (4.5)\\ &\vdots && \vdots && (4.6)\\ &n\text{-Tupel:} && (a_1, \ldots, a_n) := ((a_1, \ldots, a_{n-1}), a_n) && (4.7) \end{aligned}$$

Die Mengen, in der diese Tupel enthalten sind, setzen sich aus dem *kartesischen Produkt* $\times$ der Mengen zusammen, aus denen die einzelnen Komponenten stammen:

**Definition 4 (Kartesisches Produkt)** *Seien $A$ und $B$ Mengen, dann ist*

$$A \times B := \{(a, b) \mid (a \in A) \wedge (b \in B\} \tag{4.8}$$

*das ≪kartesische Produkt≫ der beiden Mengen. Für $B = A$ schreiben wir*

$$A^2 := A \times A \tag{4.9}$$

*und analog*

$$A^n := \underbrace{A \times \ldots \times A}_{n} \tag{4.10}$$

Auf diese Weise lassen sich nun auch $n$-äre Relationen definieren:

**Definition 5 ($n$-äre Relation)** *Eine ≪$n$-äre Relation≫ $R$ besteht zwischen $n$ geordneten Objekten genau dann, es eine Menge $R$ gibt und das $n$-Tupel dieser Objekte in $R$ enthalten ist. Wir schreiben:*

$$R(a_1, \ldots, a_n) \equiv a_1 \overset{R}{\sim} a_2 \overset{R}{\sim} \ldots \overset{R}{\sim} a_n \Leftrightarrow (a_1, \ldots, a_n) \in R \tag{4.11}$$

Zahlen, Tupel, Relationen sind Mengen in unserem Mengenuniversum und die Sprechweisen "Ein Objekt, zwei Objekte, drei Objekte" oder "Dieses Objekt ist kleiner als jenes Objekt" oder "Diese Objekte stehen in Relation zu jenem und zu jenem Objekt" täuschen darüber hinweg, daß es sich bei den "Zahlen", "Ordnungen" und "Relationen" selbst um Objekte handelt, um Objekte, das heißt um *Mengen.*
Wir wollen einige ganz besonders wichtige Relationen kennenlernen, die wir zur Konstruktion von Zahlen dringend benötigen.

**Definition 6 (Funktion)** *Eine ≪Funktion≫ $f$ ist eine* eindeutige *binäre Relation, d.h. wenn irgendzwei Elemente in Relation mit demselben Element stehen, so sind sie gleich.*

$$(a \overset{f}{\sim} b) \wedge (c \overset{f}{\sim} b) \rightarrow a = c \qquad \forall a, b, c \tag{4.12}$$

*Man sagt dann auch:* a wird auf b abgebildet *und schreibt:*

$$f(a) = b \tag{4.13}$$

*Die Menge der Werte $a$, die abgebildet werden, nennt man ≪Definitionsbereich≫ oder ≪Urbild≫ ($A$), die Menge der Funktionswerte $b$ dagegen ≪Wertebereich≫ oder ≪Bild≫ ($B$) und schreibt:*

$$f: \qquad A \mapsto B \tag{4.14}$$

Jetzt haben wir die Funktionen endlich definiert und können z.B. die "Zählfunktion" $S$ aus Definition 1 zulassen.
Eine besonders wichtige Funktion bei der Konstruktion von Zahlen ist die *Folge*.

**Definition 7 (Folge)** *Eine Funktion $\varphi$ heißt ≪Folge≫ von $A$-Elementen, wenn sie eine Teilmenge der natürlichen Zahlen auf Elemente aus $A$ abbildet.*

$$\varphi : \qquad \mathbb{N} \supseteq N \mapsto A \tag{4.15}$$

*Man schreibt dann auch*

$$(a_n)_{n\in N} \in A^N \tag{4.16}$$

*und nennt $a_n$ das ≪n-te Folgenglied≫ der Folge $(a_n)_{n\in N}$. Ist $N = \mathbb{N}$, so nennt man die Folge ≪unendlich≫, andernfalls ≪endlich≫.*

Man kann sich eine Folge immer als eine diskret springende Folge von Elementen vorstellen. Auch der Begriff des *Rechnens* ist eng mit dem der Relation verbunden. Die uns geläufigen Begriffe "Addition" und "Multiplikation" sind sogenannte *binäre Operationen.* Dabei sind *Operationen* ganz einfach Funktionen, nämlich:

**Definition 8** *Eine ≪n-äre Operation≫ $\sigma$ in einer Menge $M$ ist die Abbildung eines $n$-Tupels von $M$-Elementen auf ein $M$-Element:*

$$\sigma : \qquad M^n \mapsto M \tag{4.17}$$

$$\sigma(x_1, \ldots, x_n) = y \tag{4.18}$$

Also bildet die z.B. *Addition* zwei Elemente einer Menge auf eins ab, welches man die *Summe* der beiden Elemente nennt. Dabei sind besonders folgende Eigenschaften irgendeiner gegebenen binären Relation $\circ$ wichtig:

**Definition 9 (Wichtige Eigenschaften binärer Operationen)**

a) Existenz und Eindeutigkeit:
$\exists(c \in M): \quad a \circ b = c \quad \forall(a, b \in M)$

b) Assoziativität:
$a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c \quad \forall(a, b, c \in M)$

c) Kommutativität:
$a \circ b = b \circ a \quad \forall(a, b \in M)$

d) Existenz und Eindeutigkeit des neutralen Elements:
$\exists(n \in M): \quad a \circ n = a \quad \forall(a \in M)$

e) Existenz und Eindeutigkeit aller inversen Elemente:
$\exists(\overline{a} \in M): \quad a \circ \overline{a} = n \quad \forall(a \in M)$

Superwichtig ist es auch stets, ob man Zahlen vernünftig *anordnen* kann, dazu brauchen wir die

**Definition 10 (Ordnungsrelationen)** *Eine binäre Relation "$\prec$" ist genau dann eine ≪irreflexive Ordnung≫, wenn sie* irreflexiv *und* transitiv *ist. Dabei bedeutet*

$$\text{Irreflexiv:} \qquad a \not\prec a \tag{4.19}$$
$$\text{Transitiv:} \qquad (a \prec b) \wedge (b \prec c) \to a \prec c \tag{4.20}$$
$$\tag{4.21}$$

*Eine binäre Relation "$\preceq$" ist eine ≪Reflexive Ordnung≫, wenn sie reflexiv statt irreflexiv ist, das bedeutet:*

$$\text{Reflexiv:} \qquad a \preceq b \tag{4.22}$$

*Gilt diese Relation für nicht alle Elemente einer Menge $M$, so ist sie eine ≪Halbordnung≫ auf $M$, gilt sie für alle Elemente, so ist sie eine ≪totale Ordnung≫ auf $M$.*

Man kann sich diese Ordnungen anschaulich immer als ein "kleiner als" bzw. "kleiner gleich" vorstellen. Für Zahlen ist es stets von Interesse, ob sie vollständig anordenbar sind. Die VON NEUMANNsche Definition der natürlichen Zahlen, die wir oben bereits eingeführt hatten, ermöglicht mit der Relation "ist enthalten in" eine irreflexive Totalordnung. Irreflexiv deshalb, weil keine der konstruierten Mengen in sich selbst enthalten ist. Dennoch kann man natürlich eine reflexive Ordnung konstruieren, indem man zusätzlich eine "Gleichheit" definiert. Dies geschieht über die Einführung einer

**Definition 11 (Äquivalenzrelation)** *Eine binäre Relation "$\sim$" auf einer Menge $M$ ist genau dann eine ≪Äquivalenzrelation≫ auf $M$, wenn sie auf ganz $M$* reflexiv, transitiv *und* symmetrisch *ist. Dabei bedeutet*

$$\text{Reflexiv:} \qquad a \sim a \tag{4.23}$$
$$\text{Transitiv} \qquad (a \sim b) \wedge (b \sim c) \to a \sim c \tag{4.24}$$
$$\text{Symmetrisch:} \qquad (a \sim b) \to (b \sim a) \tag{4.25}$$

Die Äquivalenzrelation ist ein zentraler Begriff bei der Konstruktion von Zahlen und daher müssen wir ihn *verstehen.*
Eine Äquivalenzrelation ist eine bestimmte Form des "Schubladendenkens", in der eben bestimmte Dinge einfach als *gleich* betrachtet werden, auch wenn sie eigentlich gar nicht gleich sind.
Man kann sich eine Äquivalenzrelation auf einer Menge anschaulich als ihre Unterteilung in bestimmte Untermengen vorstellen, die "Äquivalenzklassen", deren Elemente einander äquivalent sind. Dies nennt man eine "Äquivalenzklassen-" oder "Restklassenzerlegung".

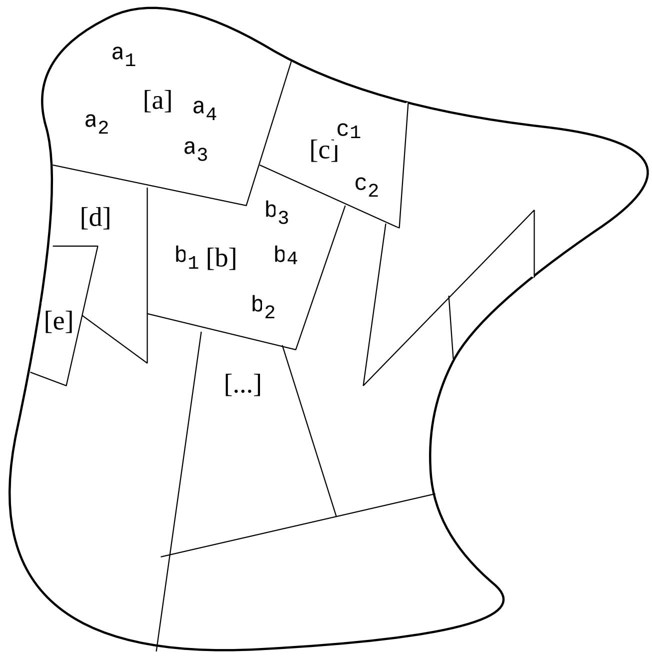


Abbildung 4.1: *Restklassenzerlegung einer Menge M*

Beispielsweise kann man die Menge der natürlichen Zahlen in gerade und ungerade Zahlen zerlegen, indem man folgende Äquivalenzrelation $g$ einführt:

$$\forall(a, b \in \mathbb{N}) : \qquad a \overset{g}{\sim} b \leftrightarrow (a \mod 2) = (b \mod 2) \tag{4.26}$$

Dabei bedeutet "$a \mod 2$" der *Rest* der wiederholten Division durch 2. Alle geraden Zahlen haben Rest Null, alle ungeraden Zahlen Rest Eins. Damit zerfallen alle natürlichen Zahlen in zwei Äquivalenzklassen: diejenigen, die Rest Null haben – die *gerade* Zahlen – und diejenigen, die Rest Eins haben – die *ungeraden* Zahlen. Beide Klassen nennt man nun *Restklassen*. Man gebraucht diesen Begriff ganz allgemein bei Zerlegungen über eine Äquivalenzrelation. Jede Restklasse wird dann allgemein definiert über:

$$[a]_R := \{b \in M \mid a \overset{R}{\sim} b\} \tag{4.27}$$

In unserem Beispiel wäre $M = \mathbb{N}$ und $R = g$ die oben definierte Äquivalenzrelation. Die Wahl des *Repräsentanten* $a$ jeder einzelnen Restklasse $[a]_R$ ist unerheblich, es kann jedes ihrer Elemente zum Repräsentanten gewählt werden – wie in einer gut funktionierenden Demokratie. Die Menge der Restklassen wiederum bezeichnet man als *Restklassenzerlegung* oder *Quotient* der Grundmenge $M$:

$$M/R := \{[a]_R \mid a \in M\} \tag{4.28}$$

In unserem Beispiel ist also die Grundmenge $M$ die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$, die Äquivalenzrelation $R$ ist das oben definierte $g$, die Restklassen $[a]_R$ sind die Mengen $[a]_g$ der natürlichen Zahlen, die bezüglich $g$ äquivalent sind, d.h. gerade oder ungerade sind, und der Quotient $M/R$ ist hier die Menge $\mathbb{N}/g$, welche nur zwei Elemente enthält, nämlich eine gerade und eine ungerade Restklasse, für die man praktischerweise die Repräsentanten [0] und [1] wählen kann.
Es ist jedoch in den speziellen Fällen, wo man eine Äquivalenzklassenzerlegung über eine Summe aus Repräsentant plus Rest darstellt, üblich, anstatt des Quotienten aus Grundmenge und Relation den Quotienten aus Grundmenge und Rest anzugeben. Die Schreibweise wäre in unserem Beispiel:

$$\mathbb{N}/2 := \{[R] \mid R = (a \mod 2); a \in \mathbb{N}\} \tag{4.29}$$

$$[R] := \{a \in \mathbb{N} \mid (a \mod 2) = R\} \tag{4.30}$$

Man nennt dann $[R]$ die *Restklasse von* $\mathbb{N}$ *modulo 2*. Allgemein müssen Restklassen *disjunkt* und *vollständig* sein, wobei *disjunkt* bedeutet, daß es keine gemeinsamen Elemente gibt, und *vollständig*, daß die Vereinigung über alle Restklassen wieder die Grundmenge ergibt. Außerdem darf die leere Menge keine eigene Restklasse bilden. Dann und nur dann handelt es sich um eine *Zerlegung*.

**Definition 12 (Restklassenzerlegung)** *Sei $M$ eine Menge und $R$ eine Äquivalenzrelation. Dann ist genau dann die Menge $M/R$ der Äquivalenzklassen (Restklassen) von $M$ bezüglich $R$ eine ≪Restklassenzerlegung≫ oder ≪Quotient≫ von $M$, wenn gilt:*

$$\textit{i)} \qquad \emptyset \notin M/R \tag{4.31}$$

$$\textit{ii)} \qquad \bigcap M/R = \emptyset \tag{4.32}$$

$$\textit{iii)} \qquad \bigcup M/R = M \tag{4.33}$$

Mit diesen Werkzeugen werden wir nun Zahlen konstruieren.

# Kapitel 5

# Standard–Zahlen

## 5.1 Die ganzen Zahlen

Wir betrachten die Menge $\mathbb{N}$ der *natürlichen Zahlen*, wobei wir als Definition sowohl die VON NEUMANNsche Mengenfolge bis zum ersten Grenzelement $\omega$, welches wir mit der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen identifizieren, wählen können, als auch die durch die PEANO-Axiome festgelegte Menge, die durch eine Zählfunktion eindeutig bestimmt wird. Beides sind existierende Objekte auf der Grundlage des ZERMELO-FRAENKELschen Axiomensystems ZF. Und nun werden wir auf derselben Grundlage weitere Zahlen konstruieren. Spricht man ZF Existenz zu, so muß man auch diesen Konstruktionen Existenz zusprechen, da sie eine Konsequenz der Axiome von ZF sind.
Es gab gerade bei den *negativen Zahlen* erstaunlich viel Protest – René DESCARTES z.B. nannte sie die “falschen Zahlen”[1] – und obwohl man sie über ihre *Eigenschaften* definieren konnte, nämlich darüber daß sie einfach die *inversen Elemente* der Addition sind, daß also

$$\exists -b: \qquad b+(-b) \equiv b-b = 0 \tag{5.1}$$

gilt und man daher mit $a-b \equiv a+(-b)$ *Differenzen* definieren kann. Da wir jedoch nur von *natürlichen Zahlen* ausgehen, sind diese Differenzen nur definiert, falls diese wieder natürliche Zahlen sind, falls also $a \geq b$ ist. Wenn man darüberhinaus

$$(a-b=c) \leftrightarrow (a=b+c) \tag{5.2}$$

definiert, dann hat man zwar gewisse “negative” Elemente für $a<b$ *eindeutig festgelegt*, aber noch nicht ihre Existenz gezeigt. Das bringt uns in die unbefriedigende Situation, mit negativen Zahlen zwar problemlos *rechnen* zu können aber nicht ihre *Existenz* nachgewiesen zu haben. Dies gelingt uns jedoch durch eine einfache *Restklassenzerlegung*.
Wir betrachten geordnete Paare $(a,b)$ von natürlichen Zahlen und definieren eine Äquivalenzrelation $\bar{\sim}$ mittels

$$(a,b) \mathrel{\bar{\sim}} (c,d) \leftrightarrow a+d = b+c \tag{5.3}$$

[1] ebbinghaus

Was wir machen ist folgendes: wenn wir schon nicht die Differenz $a - b$ bilden können, falls $a < b$ ist, diese Differenz aber ansonsten *eindeutig* wäre, so wählen wir eben die *existierenden* Zahlen $a$ und $b$ und bilden ein *existierendes* Tupel $(a, b)$, welches wir mit dieser Differenz identifizieren. Da es aber unendlich viele solcher Tupel gibt, die dieselbe Differenz beschreiben, so fassen wir diese in einer Restklasse zusammen als

$$[(a,b)]_- := \{(c,d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid (c,d) \bar{\sim} (a,b)\} \tag{5.4}$$

und bilden damit den Quotienten $(\mathbb{N}\times\mathbb{N})/-$, welchen wir mit der *Menge der ganzen Zahlen* $\mathbb{Z}$ identifizieren. Nochmal anschaulich: wir definieren die ganzen Zahlen über *Differenzen* natürlicher Zahlen. Diejenigen Paare natürlicher Zahlen, die dieselbe Differenz haben, betrachten wir als *äquivalent*. Damit haben wir eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Paare natürlicher Zahlen. Alle diese Dinge *existieren*, also existieren auch die ganzen Zahlen. Nur hilft es unserer Anschauung oder dem konkreten rechnerischen Umgang mit ihnen wenig, wenn wir wissen, daß sie im Grunde Restklassen bezüglich einer Äquivalenzrelation auf einem System aus geordneten Paaren natürlicher Zahlen sind. Es reicht, wenn wir ihre *Eigenschaften* kennen und auch wissen, daß sie *exisiteren*. Das sieht irgendwie mehr nach geistigen Verrenkungen als nach gottgegebenen Objekten aus. Richard Dedekind meint:[2]:

> *Die Zahlen sind freie Schöpfungen des menschlichen Geistes, sie dienen als ein Mittel, um die Verschiedenheit der Dinge leichter und schärfer aufzufassen.*

Im Gegensatz dazu meinte Kronecker[3]:

> *Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk.*

Offenbar versteht der Mensch immer gerade das als "von Gott gemacht", was er besonders leicht einsieht. Alles andere erscheint ihm suspekt und fragwürdig. Gerne streitet er auch grundsätzlich die Existenz dessen ab, was er nicht unmittelbar einsieht.

## 5.2 Die rationalen Zahlen

Schon die alten Griechen kannten die rationalen Zahlen. Allerdings waren diese für sie keine Zahlen sondern *Zahlenverhältnisse*. Die moderne Mathematik verschafft ihnen objektive Existenz auf der Grundlage von ZF. Und wieder ist es eine Restklassenzerlegung, die dies ermöglicht. Ähnlich wie bei den ganzen Zahlen wissen wir bereits, daß man den *Kehrwert* einer Zahl einfach als ein inverses Element der *Multiplikation* auffassen kann:

$$\exists \frac{1}{a} : \qquad a \cdot \frac{1}{a} = 1 \qquad \forall a \tag{5.5}$$

[2]R. Dedekind "Was sind und was sollen die Zahlen", Braunschweig 1887 (Vorwort zur ersten Auflage)
[3]L. Kronecker, Jahresbericht DMV 2, S.19

und genauso läßt sich ein *Bruch* eindeutig festlegen über

$$\frac{a}{b} := a \cdot \frac{1}{b} \tag{5.6}$$

aber wiederum wissen wir nicht, ob diese Dinger wirklich *existieren*. Was machen wir also? Wir definieren die rationalen Zahlen über *Brüche*. Wir nehmen die Menge aller geordneten Paare $(a, b)$ und definieren eine Äquivalenzrelation $\overset{/}{\sim}$ mittels

$$(a, b) \overset{/}{\sim} (c, d) \leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c \tag{5.7}$$

Anschließend bilden wir die entsprechenden Restklassen und identifizieren den Quotienten $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})//$ mit der Menge der *rationalen Zahlen*. Zack! – das war's. Wer die obige Sache mit den ganzen Zahlen verstanden hat, der versteht auch die Sache mit den rationalen Zahlen, weil sie nämlich vollkommen analog ist.
Es gibt aber nun eine wichtige Eigenschaft, die der Menge der rationalen Zahlen zukommt: sie bilden einen *Körper*. Was ist das? Nun, ein Körper hat sehr angenehme Eigenschaften, die es leicht machen, mit seinen Elementen zu rechnen.

**Definition 13 (Körper)** *Eine Menge $K$ von Elementen, auf denen die Addition und die Multiplikation wie folgt definiert ist, nennen wir einen ≪Körper≫:*

*i)* *Existenz, Eindeutigkeit, Assoziativität und Kommutativität der* Summe $a + b$, *sowie Existenz und Eindeutigkeit des neutralen und aller inversen Elemente.*

*ii)* *Existenz, Eindeutigkeit, Assoziativität und Kommutativität des* Produkts $a \cdot b$ *sowie Existenz und Eindeutigkeit des neutralen und aller inversen Elemente.*

*iii)* *Distributivität zwischen Addition und Multiplikation:*
$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$

*iv)* *$K$ ist total angeordnet*

*v)* *Monotonie der Addition:*
$(a < b) \rightarrow (a + c < b + c) \qquad \forall(a, b, c \in K)$

*vi)* *Monotonie der Multiplikation:*
$(a < b) \wedge (c > 0) \rightarrow (a \cdot c < b \cdot c) \qquad \forall(a, b, c \in K)$

Während die natürlichen Zahlen keine Körper bilden (es gibt kein additiv Inverses), ebensowenig die ganzen Zahlen (es gibt kein multiplikativ Inverses), so tun's aber die rationalen Zahlen, wie sich leicht zeigen läßt. Zahlen, mit denen wir ohne Probleme rechnen wollen, sollten immer Elemente eines Körpers sein.

Wieviele rationale Zahlen gibt es? Nun, nach der Cantorschen Definition sind Mengen genau dann gleichmächtig, wenn es eine eineindeutige Abbildung ihrer Elemente aufeinander gibt. Das leuchtet im endliche unmittelbar ein. Im Unendlichen aber stoßen wir manchmal dagegen auf ziemlich unintuitive Aussagen. Eine davon ist:

Die rationalen Zahlen sind abzählbar.

Das bedeutet: Sie sind gleichmächtig mit der Menge der natürlichen Zahlen! Um das zu sehen, stelle man sich die rationalen Zahlen auf folgende Weise angeordnet vor:
Man nehme alle Brüche, deren Zähler und Nenner in der Summe 2 ergeben. Das ist nur die Eins selbst. Dann nehme man diejenigen mit der Summe 3. Das sind 1/2 und 2. Dabei reihe man sie der Größe nach auf. So verfahre man also allgemein:

$$1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, \frac{2}{2} = 1, 4, \ldots \left.\frac{k}{l}\right|_{k+l=n}, \ldots \tag{5.8}$$

Man sieht, daß man auf diese Weise alle rationalen Zahlen abzählen kann, d.h. zu jeder natürlichen Zahl $n$ finden sich eine endliche Anzahl von Brüchen. Nun kann man diese Brüche, die jeweils wieder abzählen. Also ist die Menge der rationalen Zahlen gleichmächtig mit den natürlichen Zahlen, was einem intuitiv widerstrebt.

Es gibt noch eine wichtige Eigenschaft der rationalen Zahlen: Sie sind *dicht*. Das bedeutet anschaulich, daß zwischen zwei rationalen Zahlen immer wieder eine rationale Zahl liegt, egal wie nah sie beieinander stehen:

**Definition 14 (dicht)** *Eine angeordnete Menge $M$ ist genau dann dicht in einer Menge $M'$, wenn gilt:*

$$\exists b \in M : \qquad a < b < c \forall a, c \in M' \tag{5.9}$$

In diesem Fall ist $M = m' = \mathbb{Q}$, die rationalen Zahlen sind dicht in sich selbst, oder kurz: sie sind dicht. Das gilt z.B. nicht für ganze Zahlen: zwischen 2 und 3 liegt keine weitere ganze Zahl mehr. Diese schöne Eigenschaft sorgt dafür, daß wir die rationalen Zahlen bereits als etwas *kontinuierliches* auffassen können. Und es scheint uns, als sei es gar nicht nötig oder sogar möglich, Zahlen zu konstruieren, die *noch dichter* liegen. Was ist denn noch dichter als dicht? In der Tat ist aber das, was uns hier *kontinuierloch* erscheint, noch gar nicht das, was wir als mathematisches *Kontinuum* auffassen. Es läßt sich nämlich noch ein Körper finden, der *noch dichter* ist und damit sozusagen *noch kontinuierlicher*, nämlich den Körper der *reellen Zahlen.*

## 5.3 Die reellen Zahlen

Die alten Griechen glaubten, daß die Welt aus Zahlen und deren *Verhältnissen* aufgebaut ist. Zumindest die Pythagoräer. Es bedeutet schlechthin folgendes: Zu irgendzwei Strecken $a$ und $b$ – die Griechen dachten immer in Strecken – gibt es ein endliche Maßeinheit $e$, so daß beide Strecken ganzzahlige Vielfache von $e$ sind. In Symbolen:

$$\exists (e \in S; m, n \in \mathbb{N}) : \qquad (a = m \cdot e) \wedge (b = n \cdot e) \forall (a, b \in S) \tag{5.10}$$

Die Menge $S$ bezeichne hier die Menge aller Strecken, die die Griechen für existent hielten. Wie sich zeigt, ist diese Aussage *falsch*. Pikanterweise läßt sie sich gerade an einem Objekt falsifizieren, welches die Pythagoräer zu ihrem Ordenssymbol gemacht hatten: das *Pentagramm*. Auf Abbildung 5.1 ist das Pentagramm sowie eine zusätzliche Kante zu

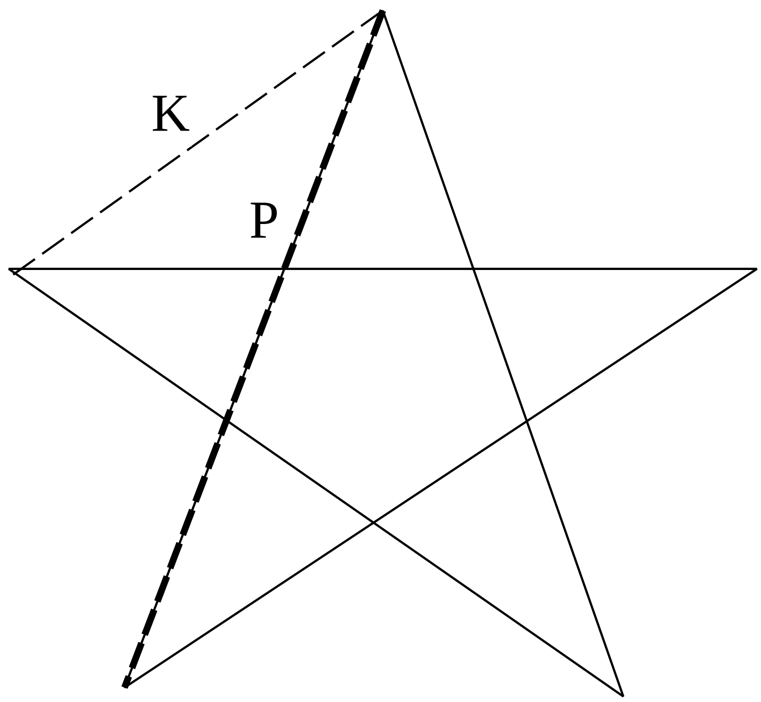


Abbildung 5.1: *Das Pentagramm: Ordenssymbol der Pythagoräer. Gestrichelt ist eine kritische Kante eingezeichnet, die mit den Strecken des Pentagramms nicht verträglich ist.*

sehen. Diese Kante ist nicht mit den Strecken des Pentagramms verträglich, man sagt auch *inkommensurabel*, und zwar im folgenden Sinne: Es findet sich keine Maßeinheit $e$, die gleichzeitig ganzzahliges Vilefaches der Kanten des Pentagramms und der besagten Kante ist. Um das zu zeigen, leitet man geometrisch her (mit einigen Hilfsdiagonalen und Ähnlichkeitsverhältnissen), daß für das Verhältnis der kritischen Kante $K$ und der langen Kante $P$ des Pentagramms (siehe Abb. 5.1) gilt:

$$\frac{P}{K} = \frac{K}{P-K} \tag{5.11}$$

Man kann diese Gleichung noch weiter umformen:

$$\frac{P}{K} = \frac{K}{P-K} \tag{5.12}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{K}{P} = \frac{P-K}{K} = \frac{P}{K} - 1 \tag{5.13}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{P}{K} = 1 + \frac{K}{P} \tag{5.14}$$

$$\Leftrightarrow \quad \varphi = 1 + \frac{1}{\varphi} \qquad \text{mit } \varphi = \frac{P}{K} \tag{5.15}$$

Die letzte Gleichung ist ja eigentlich eine rekursive Definition für das $\varphi$. Wenn man nun ganz stur für das $\varphi$ den rechten Ausdruck immer wieder einsetzt, so erhält man folgenden Kettenbruch:

$$\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\varphi}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\varphi}}}} = \dots \tag{5.16}$$

Dieser Kettenbruch entspricht den Zwischenergebnissen des *euklidischen Algorithmus*, der benutzt wird, um eben jene elementare Maßeinheit $e$ der beiden Strecken zu finden. Bricht der Kettenbruch ab, so ist das letzte Element – die einzige ungebrochene Zahl – die Maßeinheit $e$. Beispielsweise

$$\frac{a}{b} = n_1 + \frac{1}{n_2 + \frac{1}{n_3 + e}} \qquad n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N} \tag{5.17}$$

Die Aussage der Pythagoräer über ganzzahlige Streckenverhältnisse ist also äquivalent zu der Aussage daß der euklidische Algorithmus stets abbricht. Mit dem Streckenverhältnis im Pentagramm haben wir aber einen Kettenbruch, der nicht abbricht, also bricht auch der zugehörige euklidische Algorithmus nicht ab. Damit gibt es keine elementare Maßeinheit $e$, in die beide Strecken $P$ und $K$ ganzzahlig zerlegbar sind!

Interessanterweise ist dieses Streckenverhältnis der *goldene Schnitt*, den die alten Ägypter bereits kannten. Pythagoras war 22 Jahre Priester an einem Ägyptischen Tempel[4], also müßte auch er den goldenen Schnitt gekannt haben und daß er nicht als rationaler Bruch darstellbar ist, hätte er durch Überlegung herausfinden können. Das Streckenverhältnis für den goldenen Schnitt lautet numerisch

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \tag{5.18}$$

[4]siehe dazu: Peter Tompkins "Cheops"(Knaur), S.260

und ist eine irrationale Zahl. Wie auch immer, stattdessen hat Hippasus diese Unverträglichkeit herausgefunden und damit einigen Ärger verursacht, weil es an der wissenschaftlichen und politischen Machtposition der Pythagoräer rüttelte und zu allem Übel auch noch im Pentagramm selbst – ihrem Ordenssymbol ! – zu finden war.

Während die Griechen Probleme hatten, an die Existenz irrationaler Zahlen zu glauben, hat die moderne Mathematik damit keine Schwierigkeiten. Sie nimmt sich einfach ein Restklassensystem bezüglich gleicher Grenzwerte von Folgen rationaler Brüche und nennt dies den *Körper der reellen Zahlen.*
Augenblick! Dies ist ein neuer Trick! Bei bestimmten irrationalen Zahlen wie z.B. dem goldenen Schnitt läßt sich explizit eine *Konstruktionsvorschrift* angeben, mit der wir uns der Zahl *nähern.* Die Idee liegt also nahe, eine *Folge* von Zahlen zu nehmen, deren jede mittels ebendieser Konstruktionsvorschrift aus ihrem Vorgänger hervorgeht. Und die Zahl, der sich diese Folge beliebig dicht *nähert*, nennen wir *Grenzwert* dieser Folge. Man schreibt dann:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \tag{5.19}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \exists n_0 \in \mathbb{N}: \qquad |a_n - a_m| < \epsilon \qquad \forall(\epsilon > 0; n, m > n_0) \tag{5.20}$$

Dies ist pure *Epsilontik.* Es bedeutet in groben Worten: Sei eine Zahlenfolge $(a_n)$. Rücken die Folgenglieder dieser Folge *beliebig dicht* aneinander und es gibt genau eine Zahl $a$, der sie sich nähern, so nennen wir die Folge *konvergent* und die Zahl $a$ ihren *Grenzwert.*
Wir können beispielsweise für die Approximation des goldenen Schnittes $\varphi$ die Folge

$$a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n} \tag{5.21}$$

wählen. Diese Folge nähert sich dem goldenen Schnitt $\varphi$ beliebig dicht, ohne ihn jemals zu erreichen.
Während die Folge aus rationalen Zahlen besteht, muß die Zahl, der sich die Folge nähert, nicht eine rationale Zahl sein. Was liegt also näher als die gewünschten Zahlen, wlche *Grenzwerte* bestimmter Folgen sind, durch die *Folgen selbst* zu repräsentieren, ähnlich wie wir es ja schon bei der Konstruktion der ganzen Zahlen aus den Differenzen natürlicher Zahlen gemacht haben. Das ist natürlich nur sinnvoll, wenn es einen Grenzwert gibt, es sich also um eine *konvergente* Folge handelt. Nun haben aber bestimmte konvergente Folgen denselben Grenzwert. Tja, was tun wir dann natürlich? Wir betrachten diese Folgen als *äquivalent.* Und schon haben wir unsere Restklassenzerlegung, die uns die Menge der reellen Zahlen beschert:

### 5.3.1 Konstruktion der reellen Zahlen

i) Wir betrachten konvergente Folgen rationaler Zahlen als Grundmenge:

$$G = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} \mid (a_n)_{n\in\mathbb{N}} konvergent\} \tag{5.22}$$

ii) Wir bezeichnen diejenigen Folgen als äquivalent, die denselben Grenzwert haben, deren Differenz also eine Nullfolge ist:

$$\big((a_n) \sim (b_n)\big) \qquad \leftrightarrow \qquad \big(\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = 0\big) \tag{5.23}$$

iii) Damit bilden sich in der Grundmenge gewisse Restklassen, die wir als *reele Zahlen* bezeichnen:

$$a := [(a_n)] := \{(b_n) \in G \mid (b_n) \sim (a_n)\} \tag{5.24}$$

iv) Und den Quotienten nennen wir *Menge der reellen Zahlen*:

$$\mathbb{R} := G/\sim \tag{5.25}$$

Es ist auch üblich, den Quotienten als Restklassenzerlegung *modulo Nullfolgen* anzugeben:

$$\mathbb{R} := G/N \tag{5.26}$$

$$N := \{(a_n) \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} \mid \lim_{n\to\infty} a_n = 0\} \tag{5.27}$$

$$[(a_n)] := \{(b_n) \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} \mid (a_n - b_n) = N\} \tag{5.28}$$

Eine Folge ist also mit einer anderen genau dann äquivalent, wenn sie sich nur um eine Nullfolge unterscheidet.
Man kann nun zeigen, daß die so definierten Zahlen einen *Ring* bilden, wenn man Addition und Multiplikation von Folgen einfach komponentenweise definiert:

$$(a_n) + (b_n) := (a_1 + b_1, a_2 + b_2 + \ldots) \tag{5.29}$$

$$(a_n) \cdot (b_n) := (a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2, \ldots) \tag{5.30}$$

Was ist ein Ring? Hier:

**Definition 15 (Ring)** *Sei $M$ eine Menge in der Addition und Multiplikation definiert ist, so daß gilt:*

*i) $M$ ist bezüglich der Addition eine kommutative Gruppe, d.h.*
*a)* $a + b \in M \qquad \forall a, b \in M$
*b)* $a + b = b + a \qquad \forall a, b \in M$
*c)* $\exists 0 \in M : a + 0 = a \qquad \forall a \in M$
*d)* $\exists (-a) \in M : a + (-a) = 0 \qquad \forall a \in M \;\; a, b \in M \Rightarrow (a + b) \in M$

*ii)* $a, b \in M \Rightarrow (a \cdot b) \in M$ *und* $(b \cdot a) \in M$

*iii)* $a, b, c \in M \Rightarrow a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ *und*
$(b + c) \cdot a = (b \cdot a) + (c \cdot a)$

*so nennt man $M$ einen* ***Ring****.*

Genauso komponentenweise verfährt man mit Differenz und Division, wobei sich glücklicherweise dabei keine Probleme ergeben, weil es sich bei der Klasse der Nullfolgen um ein *maximales Ideal* handelt. Was ist das? Nun:

**Definition 16 (Ideal)** *Ist $M$ ein Ring und $I$ eine Teilmenge von $M$ und es gilt:*

*i) $I$ ist bezüglich der Addition eine kommutative Gruppe.*

*ii) $a \in I, b \in M \Rightarrow (a \cdot b) =\in I$ und $(b \cdot a) \in I$*

*dann nennt man $I$ ein* ***Ideal in*** *$M$.*
*Wenn es kein Ideal $I'$ gibt, das $I$ echt umfaßt, wenn also $I \subseteq I' \Rightarrow I = I'$ gilt, dann nennt man $I$ ein* ***maximales Ideal****.*

Nullfolgen bilden, wie man sich leicht klarmacht, ein Ideal im Raum der konvergenten Folgen. Wie man sich nicht so leicht klarmacht,bilden sie ein maximales Ideal. Nun gibt es einen

**Satz 1** *Ist $I$ ein maximales Ideal in $M$, so ist der Quotient $M/I$ ein Körper.*

also folgt, daß die rellen Zahlen einen Körper bilden, was man aber auch durch Verifikation der Körperaxiome zeigen kann.

Wie steht es mit der Anordnung der reellen Zahlen? Dies ist ganz einfach: eine relle Zahl $a$ ist genau dann größer als eine andere relle Zahl $b$, wenn die durch $a$ repräsentierte Folge fast überall größer als die durch $b$ repräsentierte Folge ist:

$$a \geq b \qquad \Leftrightarrow (a_n) \geq (b_n) \qquad f.ü. \tag{5.31}$$

Dabei bedeutet:

**Definition 17 (fast überall)** *Eine Eigenschaft E trifft ≪f.ü.≫ (≪fast überall≫) auf eine unendliche Anzahl von Elementen genau dann zu, wenn sie für alle bis auf endlich viele Elemente zutrifft.*

Mithilfe dieser Definition ist $\mathbb{R}$ ein *vollständig angeordneter Körper.*
Schließlich kann man noch zeigen, daß jede konvergente Folge reeller Zahlen gegen eine relle Zahl konvergiert. Man sagt dann auch: $\mathbb{R}$ ist *vollständig.*

## 5.4 Eigenschaften der reellen Zahlen

Fassen wir noch einmal die Eigenschaften von $\mathbb{R}$ zusammen:

$\mathbb{R}$ **ist ein Körper.** Dies bedeutet, man kann mit den Elementen aus $\mathbb{R}$ bequem rechnen, so wie wir es gewohnt sind: man kann addieren, subtrahieren, multiplizieren und dividieren, man kann auch die Potenzierung $a^b$ definieren und braucht sich keine Sorgen machen, denn diese Ausdrücke sind immer existent und eindeutig bestimmt.

$\mathbb{R}$ **ist vollständig.** Man kann unendliche Summen bilden, sog. *Reihen*, oder unendliche Folgen, und weiß, daß wenn sie konvergent sind, existieren und eindeutig bestimmt sind.

$\mathbb{R}$ **ist ordnungsvollständig**

**Definition 18 (Ordnungsvollständigkeit)** *Ein angeordneter Körper $K$ heißt* ordnungsvollstandig*, falls jede nichtleere Teilmenge $M \subseteq K$ , die eine obere Schranke besitzt, auch eine* kleinste *obere Schranke besitzt.*

Eine *obere Schranke* einer Menge $M \subseteq K$ ist ein Element aus $K$, welches größer als jedes Element aus $M$ ist. Wenn es nun ein kleinstes solches Element gibt, welches nicht unbedingt in $M$ liegen muß, dann nennt man den Körper *ordnungsvollständig*. Dies bedeutet anschaulich, daß Intervalle in $K$ nicht "ausgefranst" sind, d.h. wohlbestimmte Grenzen haben, eine Eigenschaft, die sehr angenehm ist, sogar so angenehm, daß wir uns gar nicht vorstellen können, wie dies nicht so sein kann. Kann es einen Körper mit ausgefransten Intervallen geben? Also einen Körper, der keine *Grenzpunkte* an den Intervallgrenzen hat? Man stelle man sich Länder vor, deren Grenzen so breit sind, daß man gar nicht von einem Land ins nächste kommt! Dies ist gar nicht so abwegig, wenn man beispielsweise die Grenze zwischen der BRD und der ehemaligen DDR anschaut. Gab es jemals eine breitere Grenze? Nun ja, hier ist es in der Tat eine *unendlich breite Grenze*, die wir uns vorstellen müßten und es fällt uns schwer, sie überhaupt noch als *Grenze* zu akzeptieren. Und doch werden wir das im nächsten Kapitel tun müssen...

$\mathbb{R}$ **ist dicht.** Man weiß, daß zwischen zwei beliebigen rellen Zahlen immer eine relle Zahl liegt, egal wie nah sie beieinander sind. Das wußten wir schon von den rationalen Zahlen. Es gilt sogar: die rationalen Zahlen liegen dicht in $R$! Es ist also auch möglich zu je zwei rellen Zahlen immer eine rationale Zahl zu finden, die dazwischen liegt. Nun könnte man verleitet sein, zu sagen, daß gar keine Zahlen wirklich hinzugekommen sind. Das ist aber grottenfalsch, denn:

$\mathbb{R}$ **ist überabzählbar** Tja, das ist es, was den rellen Zahlen die Auszeichnung "Kontinuum" verschafft. Sie sind nicht nur dicht, sondern auch mächtiger als die rationalen Zahlen. Man sieht das auf folgende Weise:
Man stelle sich die reellen Zahlen zwischen 0 und 1 auf irgendeine Weise untereinander

angeordnet vor, etwa so:

$$\begin{matrix} 0,\mathbf{2}52138645\ldots \\ 0,0\mathbf{2}9476343\ldots \\ 0,34\mathbf{0}494849\ldots \\ 0,483\mathbf{9}04950\ldots \end{matrix} \tag{5.32}$$

Dann läßt sich eine Zahl konstruieren, die sich von der 1. Zahl dieser Reihe an der 1. Stelle unterscheidet, von der 2. Zahl an der 2. Stelle, von der 3. Zahl an der 3. Stelle usw. (dicke Ziffern in Ausdruck 5.32). diese Zahl unterscheidet sich also von *jeder* Zahl in der Reihe, und zwar *volllkommen gleichgültig* wie diese Reihe aussieht. Daraus kann man nur schließen, daß keine Reihe konstruierbar ist, die alle rellen Zahlen erfaßt! Und damit ist die Menge der reellen Zahlen nicht abzählbar, also *überabzählbar*.
Es sind also nicht nur lediglich *ein paar* Zahlen zu unserer dichten Menge $\mathbb{Q}$ hinzugekommen, sondern *ein Riesenhaufen*, nämlich soviel, daß die Menge nicht mehr abzählbar ist. Man kann zeigen, daß die rationalen Zahlen in den rellen Zahlen eine *Nullmenge* bilden, was soviel heißt, daß es nicht nur sehr unwahrscheinlich ist, per Zufall eine Zahl aus $\mathbb{R}$ zu ziehen, die rational ist, sondern daß diese Wahrscheinlichkeit *exakt Null* ist. Damit haben wir folgende Konsequenz: Da bestimmte Objekte der Realität kontinuierlich sind, z.B. Strecken – wie man am Beispiel des Pentagramms sieht –, ist die Beschreibung durch rationale Zahlen für diese Objekte nicht nur unzureichend, sondern *falsch*, in dem Sinne, als daß ein solches Objekt *in der Natur* niemals eine rationale Größe annehmen kann. Es gibt einfach in der Natur keine Strecken mit Länge 1 oder 2,5 oder 1,4294 oder 3/16, weil die Wahrscheinlichkeit, daß dies der Fall wäre *Null* ist. Damit ist eine kontinuierliche Beschreibung für ein kontinuierliches Objekt die einzige realistische Beschreibung. Auch ist es unmöglich, mit rellen Zahlen als *konkreten* Größen zu rechnen. Wenn wir $\pi$ schreiben, so *symbolisieren* wir eine Größe, deren *exakte* Ausdehnung niemand kennt. Mit diesem Symbol läßt sich dann *abstrakt* rechnen, obwohl man seine Ausdehnung nicht *konkret* angeben kann. Auf der anderen Seite, kann man eine reelle Zahl durch eine rationale *beliebig dicht* approximieren. Also ist es durchaus beliebig sinnvoll, relle Zahlen durch endliche Dezimalzahlen oder Brüche zu approximieren, es kann aber auch *beliebig unsinnig* sein, wie sich bei den Anfangswertproblemen bestimmter nichtlinearer Differentialgleichungen zeigt, also bei der Behandlung *chaotischer Systeme*. Hier ist es *definitiv unmöglich* die Entwicklung des Systems für alle Zeiten vorauszusagen. Und das liegt im Grunde mit an der Unmöglichkeit, den genauen Anfangszustand des Systems zu *kennen*, weil dieser durch eine relle Zahl gegeben ist, die *a priori* nicht zugänglich ist, weil alle Meßgeräte von endlicher Genauigkeit sind, von quantenmechanischer Unschärfe ganz abgesehen.

Ist es nun überhaupt nötig oder auch nur möglich, Zahlen zu konstruieren, die **noch dichter** als die reellen Zahlen liegen? Wir werden sehen...

# Kapitel 6

# Nicht-Standardzahlen

Nachdem wir die rationalen Zahlen zu den reellen Zahlen vervollständigt haben, ist es eigentlich ganz einfach, die rellen Zahlen zu den Nicht-Standardzahlen zu vervollständigen. Das Prinzip ist das gleiche: Wir nehmen eine Äquivalenzrelation und bilden eine Restklassenzerlegung. Diesmal betrachten wir den Raum der *reellen Folgen* als Grundmenge. Alsdann erklären wir genau die Folgen als äquivalent, die *beinahe überall* gleich sind, wobei wir dieses "beinahe überall" genau definieren müssen. Wir sehen dann, daß der sich ergebende Rest $R$ ein maximales Ideal in $\mathbb{R}$ ist, so daß damit automatisch gewährleistet ist, daß der Quotient $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}/R$ ein Körper ist. Also der Reihe nach:

## 6.1 Filter und Ultrafilter

Um den Ausdruck "beinahe überall" ("b.ü.") zu definieren, brauchen wir den Begriff des *Filters*. Das ist eine ziemlich abstrakte Geschichte und wir müssen uns auch um die Anschaulichkeit nicht weiter kümmern. Ein *Filter* ist ein System aus Mengen, also eine Menge, deren Elemente selbst Mengen sind. Dies schockt uns nicht besonders, weil wir uns ja bereits mit dem Gedanken angefreundet haben, daß eigentlich *alle* mathematischen Objekte Mengen sind, deren Elemente meistens wiederum Mengen sind, deren Elemente, ...
Stellen wir uns also eine Menge $F$ aus Mengen $a$ vor, welche Teilmengen einer bestimmten Menge $M$ sind, dann ist $F$ eine Teilmenge der Potenzmenge von $M$. Nun gelten bestimmte Eigenschaften für diese Menge $F$ und dann haben wir ein Filter. Genauer:

**Definition 19 (Filter und Ultrafilter)** *Sei $M$ eine Menge und $\mathcal{P}(M)$ ihre Potenzmenge. Ist dann $F \subset \mathcal{P}(M)$ und es gilt:*

*(a)* $F \neq \emptyset$

*(b)* $\emptyset \notin F$

*(c)* $a, b \in F \Rightarrow a \cap b \in F$

*(d)* $(a \in F) \wedge (a \subseteq b) \Rightarrow b \in F$

*dann heißt* $F$ ***Filter über*** $M$. *Ist* $F$ *außerdem ein maximales Filter, d.h. es gilt*

$$F \subseteq F' \Rightarrow F = F' \tag{6.1}$$

*dann heißt* $F$ ***Ultrafilter***.

Mit anderen Worten: Ein System $F$ von Teilmengen einer gegebenen Menge $M$ heißt genau dann **Filter**, wenn

(i),(ii) $F$ mindestens eine Teilmenge von $M$ enthält, nicht aber die leere Menge,

(iii) Zu je zwei Mengen aus $F$ auch deren Schnitt in $F$ liegt,

(iv) Zu jeder Menge aus $F$ auch deren Obermenge in $F$ liegt.

Diese Filter sind extrem unanschaulich und man kann sie auch nur in ganz wenigen Fällen wirklich expliziz angeben. Wichtig ist immer nur, ihre bloße *Existenz*. Besonders wichtig in unserem Zusammenhang ist die Tatsache daß es *zu jedem Filter einen Ultrafilter gibt*:

**Satz 2 (Existenz von Ultrafiltern)** *Zu jedem Filter* $F$ *gibt es einen Ultrafilter* $\tilde{F} \supseteq F$

Für die Ultrafilter können wir noch etwas wichtiges zeigen[1]:

**Satz 3 (Charakterisierung von Ultrafiltern)** $\tilde{F}$ *ist genau dann ein Ultrafilter über* $M$, *wenn gilt:*

$$(A \in F) \vee (M \setminus A) \in F \qquad \forall A \in M \tag{6.2}$$

Zu den wichtigsten Eigenschaften eines Ultrafilters gehört also, daß entweder eine Menge oder ihr Komplement darin enthalten sind.

Bisher sprechen wir von *fast überall*, wenn wir *für alle bis auf endlich viele* meinen. Nun wollen wir dies etwas schärfer fassen. Stellen wir uns eine unendliche Menge $M$ als vor. Dann läßt sich gewiß eine Teilmenge $A$ von $M$ bilden, deren *Komplement* endlich ist. Eine solche Menge wollen wir als ≪koendliche Menge≫ bezeichnen. Sie ist zweifellos unendlich, da $M$ ja unendlich ist. Wenn eine Eigenschaft nun auf alle Elemente von $A$ zutrifft, so sagen wir: sie trifft auf *fast alle* Elemente von $M$ zu. Es gibt aber einen Riesenhaufen solcher möglichen koendlichen Mengen, überabzählbar viele, um genau zu sein. Also ist unser Begriff *fast überall* ziemlich ungenau. Nun fassen wir alle koendlichen Mengen von $M$ zu einer Menge zusammen:

$$F := \{A \subseteq M \mid M \setminus A \quad \textit{ist endlich}\} \tag{6.3}$$

und wir stellen fest: diese Menge ist ein *Filter*! Und mit Satz 2 wissen wir auch, daß ein Ultrafilter $\tilde{F}$ existiert.
Nun endlich können wir definieren

[1] Beweise siehe [LR94]

**Definition 20 (beinahe überall)** [2] *Eine Eigenschaft $E$ trifft genau dann ≪beinahe überall≫ auf die Elemente einer unendlichen Menge $M$ zu, wenn $\tilde{F}$ der Ultrafilter der koendlichen Mengen von $M$ ist und die Eigenschaft $E$ auf alle Elemente von $\tilde{F}$ zutrifft.*

Damit haben wir eine sehr präzise, wenn auch furchtbar unanschauliche Definition des Begriffes *beinahe überall*. Für die Anschauung reicht es, sich diese *beinahe überall* als ein präzise definiertes *fast überall* vorzustellen. so und nun können wir gleich zur Konstruktion der Nichtstandard-Zahlen kommen:

### 6.1.1 Konstruktion des Körpers ${}^*\mathbb{R}$ der hyperreellen Zahlen

1. Wir nehmen als Grundmenge die Menge aller reellen Folgen:
$$G := \{(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}\} \tag{6.4}$$
Wir brauchen diesmal nicht das Kriterium der Konvergenz, ein entscheidender Punkt!

2. Wir betrachten jene Folgen als äquivalent, die *beinahe überall* gleich sind:
$$(a_n) \overset{*}{\sim} (b_n) \Leftrightarrow (a_n) = (b_n) \quad b.\ddot{u}. \tag{6.5}$$
Man kann auch formulieren: jene Folgen sind äquivalent, deren *Differenz* eine Folge ist, die beinahe überall Null ist:
$$(a_n) \overset{*}{\sim} (b_n) \Leftrightarrow (a_n - b_n) = 0 \quad b.\ddot{u}. \tag{6.6}$$
dann ist der Rest $R$ die Klasse der Folgen, die beinahe überall Null sind:
$$R := \{(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid a_n = 0 \quad b.\ddot{u}.\} \tag{6.7}$$
Folgen dürfen sich also um ein Element aus $R$ unterscheiden und sind trotzdem äquivalent.
Das bedeutet ausgeschrieben:
$$(a_n) \overset{*}{\sim} (b_n) \qquad \Leftrightarrow \{i \in \mathbb{N} \mid a_i = b_i\} \in \tilde{F} \tag{6.8}$$
$$\textit{Wobei} \qquad \tilde{F} := \{A \in M \mid M \setminus A \quad \text{endlich}\} \tag{6.9}$$
$$\textit{und} \qquad \tilde{F} \qquad \text{ist maximal} \tag{6.10}$$

3. Wir bilden Äquivalenzklassen gemäß
$$[(a_n)] := \{(b_n) \mid (b_n) \overset{*}{\sim} (a_n)\} \tag{6.11}$$
und nennen diese Klassen *hyperreelle Zahlen*. Addition und Multiplikation geschehen komponentenweise. Weil $\tilde{F}$ ein maximales Filter ist und die Menge der reellen Folgen $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ einen Ring bilden, so läßt sich zeigen, daß $R$ ein *maximales Ideal* in $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ist.

[2] Diese Definition stammt von mir. Ich will damit die ganze Sache etwas klarer und intuitiver machen

4. Wir bilden den Quotienten $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\overset{*}{\sim}$ bezüglich der Äquivalenzrlation $\overset{*}{\sim}$ bzw. den Quotienten $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}/R$ der Äquivalenzklassen reelle Folgen modulo der Klasse $R$ der Folgen, die beinahe überall Null sind. Da diese ein maximales Ideal bilden, ist der Quotient ein Körper.

Zack! – das war's.

**Einbettung der reellen Zahlen** Um nun $^*\mathbb{R}$ wirklich als *Hypervervollständigung* von $\mathbb{R}$ auffassen zu können, müssen wir natürlich die reellen Zahlen darin einbetten. Dies geschieht ganz kanonisch: die reellen Zahlen werden repräsentiert durch Äquivalenzklassen *konstanter Folgen reeller Zahlen*:

$$\forall r \in \mathbb{R}: \qquad r \mapsto (r, r, r, \ldots) \in {}^*\mathbb{R} \tag{6.12}$$

Mit dieser zwanglosen Einbettung können wir nunmehr relle Zahlen mit diesen konstanten Folgen *identifizieren* und somit $\mathbb{R}$ als *echte Teilmenge* von $^*\mathbb{R}$ auffassen.

**Anordnung von** $^*\mathbb{R}$ Die Anordnung der Elemente von $^*\mathbb{R}$ ist analog derjenigen in $\mathbb{R}$: Ein Element $a$ ist genau dann größer als ein Element $b$, wenn die Folgen, die durch $a$ repräsentiert werden, beinahe überall größer als die Folgen sind, die durch $b$ repräsentiert werden:

**Definition 21 (Ordnung auf** $^*\mathbb{R}$**)** $\forall a, b \in {}^*\mathbb{R} : \quad a \overset{*}{\leq} b \Leftrightarrow a_n \leq b_n \quad \text{b.ü.} \quad, \forall (a_n) \in a, (b_n) \in b$

## 6.2 Eigenschaften von $^*\mathbb{R}$

Wie sieht unser hypervollständiger Körper $^*\mathbb{R}$ nun eigentlich aus?

**In** $^*\mathbb{R}$ **gibt es unendlich kleine und große Elemente** Betrachten wir die Zahlenfolge

$$a_n = \frac{1}{n} \qquad n \in \mathbb{N} \tag{6.13}$$

Weil $a_n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ ist die die zugehörige hyperrelle Zahl $a$ von Null verschieden, nämlich größer. Trotzdem ist der Grenzwert Null, also gilt:

$$a = 0 \qquad \textit{und zugleich} \qquad a \overset{*}{>} 0 \tag{6.14}$$

Eine Zahl, die von Null verschieden ist und trotzdem kleiner als jede positive reelle Zahl, kann man zurecht als *unendlich kleine* oder auch *infinitesimal kleine* Zahl bezeichnen. Genauso kann man anhand der Folge $a_n = n, n \in \mathbb{N}$ zeigen, daß es unendlich große Zahlen gibt. Damit ist ein alter Traum der Mathematik – oder eher der Mathematiker? – wahrgeworden. Es *gibt* infinitesimale Zahlen!

**${}^*\mathbb{R}$ ist dicher als $\mathbb{R}$** Überlegen wir uns: Bisher wurden in $\mathbb{R}$ nur *konvergente* Folgen rationaler Zahlen betrachtet, die die Grundmenge einer Äquivalenzrelation bildeten. Jetzt sind es *beliebige* reelle Folgen. Dies erweitert also den Rahmen beträchtlich, in welchem die Äquivalenzklassen leben. Ferner gibt es einen Riesenhaufen konvergenter Folgen, die gegen denselben Grenzwert konvergieren. Sie werden in der Äquivalenzrelation $\sim$, die $\mathbb{R}$ induziert, nicht unterschieden. Die neue Äquivalenzrelation $\overset{*}{\sim}$, die ${}^*\mathbb{R}$ induziert, tut dies aber. Für sie sind diese Folgen nur dann äquivalent, wenn sie beinahe überall gleich sind. Dies trifft aber sehr viel weniger der unter $\sim$ äquivalenten Folgen. Fazit: Wir haben *wesentlich mehr* Elemente in der Grundmenge und *wesentlich kleinere* Äquivalenzklassen. Da wir den Quotienten $G/\overset{*}{\sim}$ der Grundmenge nach den Äquivalenzklassen betrachten, erhalten wir also einen Körper der *wesentlich dichter* als $\mathbb{R}$ ist!
Präzisieren wir dies: Um jede relle Zahl $r$ gibt es einen Haufen hyperreeller Zahlen ${}^*r$, die von $r$ nach der üblichen Relation $\leq$ nicht verschieden sind, wohl aber nach der neue Relation $\overset{*}{\leq}$. Wieviele? Überabzählbar viele! Denn man findet eine eineindeutige Abbildung aller reeller Zahlen auf infinitesimale Elemente, z.B. durch:

$$(r, r, \ldots) \mapsto (\frac{r}{n}) \tag{6.15}$$

und damit kann man um jede relle Zahl diese infinitesimalen Elemente gruppieren, einfach durch Addition.

### 6.2.1 Die Zahlengerade von ${}^*\mathbb{R}$

Ein kleiner Schritt ist es nun, einzusehen, daß um jede beliebige reelle Zahl Elemente liegen, die ihr unendlich nahe sind. Man prägt dafür ein eigenes Zeichen

**Definition 22 (beinahe gleich)** *Zwei Zahlen $a, b$ aus ${}^*\mathbb{R}$ sind genau dann* ***beinahe gleich****, wenn ihre Differenz infinitesimal klein ist. Wir schreiben:*

$$a \approx b \qquad \Leftrightarrow a - b \qquad \leq \frac{1}{n} \forall n \in \mathbb{N} \tag{6.16}$$

Man kann nun anhand der vollständigkeit von $\mathbb{R}$ zeigen
Alles das heißt in der Konsequenz, daß *zwischen zwei beliebigen reellen Zahlen eine ganze Zahlengerade hyperreeller Zahlen liegt, für die es kein kleinstes und kein größtes element gibt*! damit zerfällt die Zahlengerade von ${}^*\mathbb{R}$ an jeder Stelle in Zahlengeraden, die einander *nicht berühren*! Ein Bildchen dazu:
Die jeder reellen Zahl infinitesimal benachbarten Elemente nennt man **Monaden**, zu Ehren des Mathematikers und Philosophen Gottfried Leibniz (1646-1716), der sich auch die *infinitesimalen Zahlen* ausgedacht hat, mit deren Hilfe er seine Differential- und Integralrechnung entwickelte und die begrifflich auch mit den von ihm ersonnenen *Monaden* verwandt sind, welche er als kleinste elementare Bestandteile des Seienden postulierte.

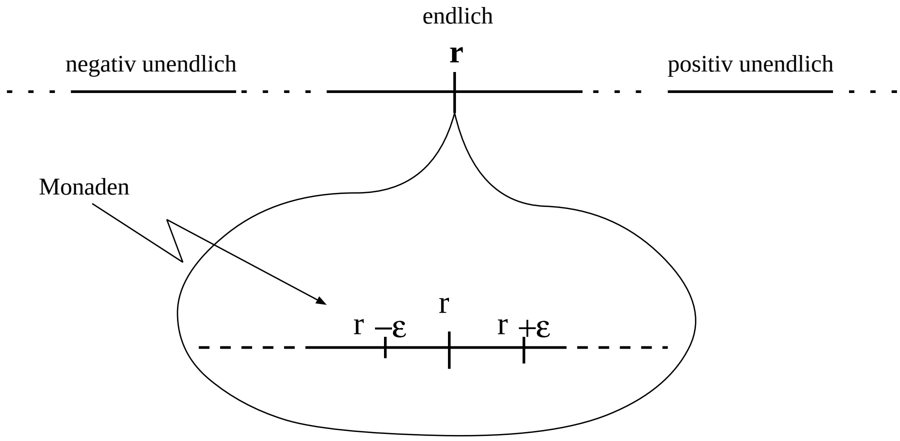


Abbildung 6.1: *Die Zahlengerade von* $^*\mathbb{R}$ *zerfällt an jeder Stelle r in disjunkte Bereiche infinitesimal benachbarter Elemente, der* ***Monaden****. Die gestrichelten Linien deuten an, daß es hier weder minimale noch maximale Elemente gibt, ein Zeichen der Ordnungs-Unvollständigkeit von* $^*\mathbb{R}$.

Wir sehen nun also, daß $^*\mathbb{R}$ nicht *ordnungsvollständig* ist! Gibt es zu einer Teilmenge eine obere Schranke, dann liegen um diese obere Schranke unendlich viele infinitesimal benachbarte Elemente, von denen es kein kleinstes oder größtes Element gibt. Intervalle sind in $^*\mathbb{R}$ also prinzipiell ausgefranst, ja die ganze Zahlengerade ist an jeder Stelle ausgefranst! Man kommt also nicht nur nicht von einem Land ins andere, man kommt überhaupt nicht von der Stelle, wenn man sich entlang der Monaden bewegen will. Das einzige, was man tun kann, ist von reeller zu reeller Zahl zu hüpfen, die wie isolierte Inseln in einem Meer von Monaden schwimmen. Man sieht also wirklich bildhaft: wenn $\mathbb{R}$ schon als kontinuierlich bezeichnet werden konnte, dann ist $^*\mathbb{R}$ noch *viel kontinuierlicher*. Dieser Gedankensprung ist uns nicht neu: haben wir doch schon bei den rationalen Zahlen gedacht – wie die alten Griechen – daß sie kontinuierlich sind, weil sie *dicht* beieinander liegen. Und dennoch mußten wir erkennen, daß es noch *viel dichter* zugehen kann, nämlich in den rellen Zahlen. Und nun stellen wir fest, daß es *noch dichter und noch kontinuierlicher* zugeht bei den hyperreellen Zahlen!

## 6.3 Übertragung von Eigenschaften von $\mathbb{R}$ auf $^*\mathbb{R}$

Müssen wir nun sämtliche Aussagen über reelle Zahlen fallenlassen und alles nochmal neu auf der Grundlage der hyperreellen Zahlen aufbauen? Das wäre eine Wahnsinnsarbeit und die macht bestimmt nicht viel Spaß, weil sicherlich viele Aussagen vollkommen analog lauten werden.
Um überhaupt festen Grund unter den Füßen zu kriegen, muß man mathematische Aussa-

gen extrem formalisieren und dann untersuchen, inwiefern sie sich übertragen lassen. Man reduziert die formale Sprache zunächst auf wenige elementare Zeichen:

$$\neg \quad \wedge \quad \exists \quad = \quad \leq \quad ( \quad , \quad ) \tag{6.17}$$

sowie auf Variablen:

$$v_1 \quad v_2 \quad v_3 \quad \ldots \tag{6.18}$$

Nun kann man zeigen, daß sich *Funktionen* $f$ auf $\mathbb{R}$ ohne Probleme zu Funktionen $^*f$ auf $^*\mathbb{R}$ eindeutig fortsetzen lassen, wir fügen sie unserem Wortschatz hinzu:

$$f, {}^*f \tag{6.19}$$

Des weiteren kann man eine *Konstante* $a$ einmal als Element aus $\mathbb{R}$ auffassen und in der Übertragung als Element aus $^*\mathbb{R}$. Um beide Fälle zu erfassen, erweitern wir unseren Wortschatz durch ein allgemeines Symbol, dessen *Interpretation* abhängt vom reellen oder hyperreellen Kontext:

$$\underline{a} \tag{6.20}$$

Als nächstes definiert man sich Terme und Formeln und schließlich Aussagen. Wenn man das alles gemacht hat, lassen sich ganz allgemeine Aussagen über Aussagen machen, man erhält sozusagen eine *Metasprache*, in der man nun folgende überraschend erleichternde Aussage beweisen kann:

**Satz 4** *Sei $\alpha$ eine $\mathbb{R}$-Aussage. Dann gilt $\alpha$ in $\mathbb{R}$ genau dann, wenn $\alpha$ in $^*\mathbb{R}$ gilt.*

Das bedeutet in schlichten Worten: alles bleibt beim Alten für das Neue. Wenn man Aussagen hat, die in $\mathbb{R}$ gelten und die sich mit den obigen Formalismen ausdrücken lassen, so kann man sicher sein, daß sie auch in $^*\mathbb{R}$ gelten. Das bedeutet, das man die ganze Entstehungsgeschichte von $^*\mathbb{R}$ vergessen kann. Man rechnet und beweist jetzt halt in $^*\mathbb{R}$ statt in $\mathbb{R}$, das ist alles! Umgekehrt gilt natürlich nicht jede $^*\mathbb{R}$-Aussage in $\mathbb{R}$, etwa daß die Ordnungsvollständigkeit verletzt ist. Dies ist eindeutig eine $^*\mathbb{R}$-Aussage und also trifft für sie Satz 4 nicht zu. Jedoch Die ganze reelle Analysis, Differential- und Integralrechnung, Existenzsätze usw. sie gelten auch in unserem neuen Körper $^*\mathbb{R}$. Ist das nicht schön? Und mehr als das: sie lassen sich zum Teil sogar wesentlich einfacher und intuitiver formulieren. Wir brauchen einige Beispiele!

### 6.3.1 Stetigkeit

Wir zeigen folgenden Satz:

**Satz 5 (Stetigkeit von Funktionen)** *Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist genau dann in einem Punkt $x \in \mathbb{R}$* ***stetig****, falls gilt:*

$$^*f(x+h) \approx {}^*f(x) \forall h \approx 0 \tag{6.21}$$

**Beweis 1** *"$\Leftarrow$": Wir nehmen an, $f$ sei in $x$ nicht stetig. Dann gibt es ein $\epsilon \in \mathbb{R}^+$, so daß es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $h_n \in \mathbb{R}$ gibt mit $|h_n| \leq \frac{1}{n}$ und $|f(x+h_n) - f(x)| \geq \epsilon$. Setzen wir nun $h = (h_n)$, so gilt offenbar $|h| \leq \frac{1}{\omega}$. Wegen $\frac{1}{\omega} \in \mathbb{M}$ (der Menge der unendlich kleinen Größen) gilt auch $h \in \mathbb{M}$, das heißt, $|{}^*f(x+h) - f(x)| \geq \epsilon$. Dies widerspricht aber offensichtlich der Voraussetzung ${}^*f(x+h) \approx f(x)$ für $h \approx 0$.*
*"$\Rightarrow$": Wir betrachten ein $h \in {}^*\mathbb{R}$ mit $|h| \leq \delta$. Dies bedeutet ja, daß $|h_n| \leq \delta$ b.ü., also $\{n \in \mathbb{N} \mid |h_n| \leq \delta\} \in \tilde{F}$. Wegen $\{n \in \mathbb{N} \mid |h_n| \leq \delta\} \subseteq \{n \in \mathbb{N} \mid f(x+h_n) - f(x)| \leq \epsilon\}$ ist auch die letztere Menge in $\tilde{F}$, das heißt es gilt $|{}^*f(x+h) - {}^*f(x)| \leq \epsilon$. Ist insbesondere $h \in \mathbb{M}$, so ist $|h| \leq \delta \quad \forall \epsilon \in \mathbb{R}^+$ richtig, das heißt es gilt:*

$$ {}^*f(x+h) \approx {}^*f(x) \tag{6.22}$$

□

Obige Formel 6.22 kann man gut gebrauchen, wenn man von ${}^*\mathbb{R}$-Aussagen zu $\mathbb{R}$-Aussagen kommen will. $h$ ist nämlich infinitesimal und ${}^*f$ ist die hyperreelle Fortsetzung der Funktion $f$. Wie sieht diese Fortsetzung aus? Nun, wir definieren den Funktionswert ${}^*f(a)$ einfach durch die Äquivalenzklasse der Folge der Funktionswerte der Folgenglieder der durch die hyperreelle Zahl $a$ repräsentierten Folge:

**Definition 23 (Hyperreelle Fortsetzung von Funktionen)** *Sei $f$ eine reelle Funktion und $a = (a_n)$ die Repräsentante einer Restklasse aus ${}^*\mathbb{R}$, also eine hyperreelle Zahl. Dann ist die hyperreelle Fortsetzung der Funktion $f : {}^*\mathbb{R} \to {}^*\mathbb{R}$ gegeben durch:*

$$ {}^*f(a) = \big(f(a_n)\big) \mod R \tag{6.23}$$

*wobei $R$ wieder der Rest der Äquivalenzrelation $\overset{*}{\sim}$ ist, d.h. die Menge aller reellen Folgen, die beinahe überall gleich Null sind.*

Mit anderen Worten: $a$ repräsentiert eine reelle Folge. Also ist auch $f(a)$ eine reelle Folge. Also kann man auch $f(a)$ in eine der Äquivalenzklasse von ${}^*\mathbb{R}$ einordnen, die wiederum mit einer Zahl ${}^*f(a)$ identifiziert wird, die man dann als den "Funktionswert von $f$ an der Stelle $a$" bezeichnet. Das war's eigentlich.
Die Stetigkeit von $f$ ist also genau dann gegeben, wenn die Funktionswerte für infinitesimal benachbarte Variablenwerte ebenfall infinitesimal benachbart sind. Und wenn der Wert der Variable reell ist, so ist der Funktionswert der fortgesetzten Funktion natürlich identisch mit dem Funktionswert der reellen Funktion:

$$ {}^*f(x) \equiv f(x) \qquad\qquad \forall x \in \mathbb{R} \tag{6.24}$$

## 6.4 Differentialrechnung

Man kann nun endlich das machen, wovon Leibniz und Consorten immer geträumt haben: Man kann die Differentialrechnung mit infinitesimalen Elementen durchführen! Dazu definieren wir

**Definition 24 (Differential)** *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion und $x \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl. Sei ferner $h \in {}^*\mathbb{R}$ eine infinitesimal kleine hyperreelle nichtverschwindende Zahl, d.h $h \approx 0$ und $h \neq 0$. Dann ist*

$$df(x) = {}^*f(x+h) - f(x) \tag{6.25}$$

*Das **Differential** von $f$ an der Stelle $x$.*
*Insbesondere erhalten wir für die Identitätsfunktion:*

$$dx = h \tag{6.26}$$

Damit läßt sich nun ganz intuitiv der *Differentialquotient* definieren:

**Definition 25 (Differentialquotient)** *Sei $f, df, x, dx$ wie oben erklärt. Dann ist*

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{{}^*f(x+dx)}{dx} \tag{6.27}$$

*der **Differentialquotient** der Funktion $f$ an der Stelle $x$. Er kann* überall *(auf dem Definitionsbereich von $f$) und* für jede *Funktion $f$ gebildet werden. Er muß aber nicht zwangsläufig in $\mathbb{R}$ liegen, sondern ist eine bestimmte hyperreelle Zahl.*

Das ist toll: da kann man mit einem Mal bedenkenlos differenzieren, auch wenn die Funktion gar nicht im üblichen Sinne differenzierbar ist! Es gilt dabei folgender Zusammenhang mit der üblichen Differenzierbarkeit:

**Satz 6** *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion, dann gilt:*

$$f'(x) \quad \text{existiert bei } x \Leftrightarrow \frac{df(x)}{dx} \approx f'(x) \tag{6.28}$$

Nun kann man die ganzen schönen Dinge für Ableitungen zeigen, die wir schon aus $\mathbb{R}$ gewohnt sind. Wir zeigen hier einmal exemplarisch die Produktregel:

**Satz 7 (Produktregel)** *Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbare reelle Funktionen, dann gilt:*

$$\begin{aligned}
d(f \cdot g)(x) &= {}^*(f \cdot g)(x+dx) - (f \cdot g)(x) && (6.29)\\
&= {}^*f(x+dx) \cdot {}^*g(x+dx) - f(x)g(x) && (6.30)\\
&= (df(x) + f(x)) \cdot (dg(x) + g(x)) - f(x)g(x) && (6.31)\\
&= df(x)dg(x) + f(x)dg(x) + g(x)df(x) && (6.32)
\end{aligned}$$

*Division durch dx ergibt dann:*

$$\begin{aligned}
\frac{d(f \cdot g)(x)}{dx} &= f(x)\frac{dg(x)}{dx} + g(x)\frac{df(x)}{dx} + \frac{df(x)dg(x)}{dx} && (6.33)\\
&\approx f(x)g'(x) + g(x)f'(x) && (6.34)
\end{aligned}$$

Wir erhalten also unsere schöne Produktregel als Spezialfall. Wenn $f$ und $g$ nicht differenzierbar wären, würde der letzte Ausdruck mit den $f'$ und $g'$ nicht existieren, dafür aber die Zeile vorher. Wir haben mit dem hyperreellen Differentialquotienten also eine echte Verallgemeinerung der reellen Differentiation. Genauso lassen sich auch die anderen Differentiationsregeln wie Kettenregel und Differentiation des Kehrwerts und der Inversen einer Funktion herleiten, alles auf ganz intuitivem Wege und ohne jede Epsilontik!

Dassselbe läßt sich nun auch für die *Integration* durchziehen, die sich als Summierung über infinitesimale Elemente entspuppt, wobei die Anzahl der Summanden nicht mehr abzählbar ist.

# Literaturverzeichnis


[ea83] Ebbinghaus et al. *Zahlen.* Springer, Berlin Heidelberg, 1983.

[Hah88] Hans Hahn. *Empirismus, Logik, Mathematik.* suhrkamp, Frankfurt a.M., 1988.

[Hof88] Douglas R. Hofstadter. *Metamagicum.* Klett-Cotta, Stuttgart, 1988.

[LR94] Dieter Landers and Lothar Rogge. *Nichtstandard-Analysis.* Springer, Berlin Heidelberg, 1994.

[Mes74] Herbert Meschkowski, editor. *Das Problem des Unendlichen.* dtv, München, 1974.