Deterministisches Chaos

Erforschung des Chaos anhand der logistischen Gleichung

Freiburg, März 1996 Kim J. Boström

Ein Intellekt, der zu einem gegebenen Zeitpunkt alle in der Natur wirkenden Kräfte kennt und die Lage aller Dinge, aus denen die Welt besteht – angenommen dieser besagte Intellekt wäre groß genug, diese Daten zu analysieren –, würde in derselben Formel die Bewegungen der größten Körper im Universum und die der kleinsten Atome erfassen; ihm wäre nichts ungewiß, und die Zukunft wie die Vergangenheit wären seinen Augen gegenwärtig.[1]

Pierre Simon Laplace

Nichts ist unmöglich[2].
Toyota

1 Motivation

Zwischen diesen beiden Aussprüchen liegen etwa 200 Jahre. Und zwischen ihnen liegt ein gewaltiger Wandel des Weltbilds, der sich sogar gerade im Augenblick vollzieht. Denn noch ist manchen die Bedeutung der sogenannten "Chaosforschung"nicht klar. Es geht um die Erschütterung des **deterministischen Weltbilds**.
Das deterministische Weltbild wurde durch die Quantenmechanik in den zwanziger Jahren dieses Jahrhunderts bereits gewaltig erschüttert. Aber sie betraf nur den *Quantenbereich*, also die Welt des Mikrokosmos. Im Makrokosmos herrschten nach wie vor streng deterministische Gesetze und niemand wagte daran zu zweifeln, daß es für sie wenigstens im Prinzip lösbare Gleichungen aufzustellen gab, oder das wenigstens einfache Systeme vorausberechenbares Verhalten zeigten. Nun ist auch diese Domäne der Vorhersagbarkeit, des Determinismus verschwunden: die Chaosforschung konnte zeigen, daß sogar in der Welt der klassischen Physik unberechenbares Verhalten nicht nur möglich, ja sogar die Regel ist.
Sie war aber nicht nur rein destruktiv: mit Hilfe völlig neuer Methoden, der Analyse fraktaler Attraktoren, konnte sie im Chaos regelmäßige Strukturen entdecken und damit diesen Bereich der Physik *doch* wieder zugänglich machen. Wir werden nun einen Auflug in den Bereich des Chaos unernehmen und der Reisebus wird die **logistische Gleichung** sein. Warum?

Was der harmonische Oszillator für die klassische Mechanik und die Quantenmechanik, das ist für die Chaosforschung die **logistische Gleichung**. An ihr lassen sich sehr viele wichtige Gewächse aus dem chaotischen Dschungel studieren: Bifurkationen, stabile Orbits, Attraktoren, Feigenbaumkontanten, Hausdorff-Dimensionen einiges andere exotische. An ihr wollen wir die eigenartige Flora untersuchen, aus der das deterministische Chaos besteht. Ursprüngliche Formulierung des belgischen Soziologen und Mathematikers *Pierre-François Verhulst* (1804-1849) als **Modell der ökonomischen Entwicklung einer Population**:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{rx(K-x)}{K} \qquad (1)$$

- **t** ist die Zeit, in der sich das System entwickelt.
- **x** bezeichnet die Anzahl der Individuen, also die **Größe der Population**.
- **r** bezeichnet die **Zuwachsrate**, das Verhältnis der Geburtenrate einer Population zu ihrer Sterberate. Für $r < 1$ stirbt die Population aus. Für $r > 1$ nimmt sie annähernd exponentiell zu, wird aber von K daran gehindert, ins Unbegrenzte zu wachsen.

[1] Pierre Simon Laplace, französischer Philosoph und Physiker (1749-1827). Zitiert in: M.Capek, op. cit., S. 122

[2] TOYOTA, japanischer Autohersteller. Zitiert 1992 als Werbeslogan von Kinos, Plakaten und Zeitschriften in ganz Deutschland

K bezeichnet die **Kapazität**. Sie entspricht dem Aufnahmevermögen der ökonomischen Umgebung an Individuen der Population.

Stellen wir uns eine Insel vor, auf der Büffel grasen. Sie können nicht alles wegfressen, sonst bleibt ihnen nichts mehr zum Leben. Was passiert nun?

Bis die Chaosforschung in den siebziger Jahren ins wissenschaftliche Rampenlicht trat, galt es bei Biologen als unerschütterliche Tatsache, daßbiologische Entwicklungen entweder ein Gleichgewicht anstreben oder aber wenigstens eine zyklische Entwicklung. Das erschien vernünftig und verständlich. Mathematische Modelle wurden danach bemessen, ob sie dieser Vorstellung besonders gut entsprachen oder nicht. Und wenn eine angesetzte Gleichung, wie z.B. die logistische Gleichung, für bestimmte Parameterwerte eigenartiges Verhalten an den Tag legte, dann war sie eben überstrapaziert und konnte in diesen Parameterbereichen nicht angewandt werden. Und wenn die Wirklichkeit ebenfalls verrückt spielte, dann waren eben noch nicht genügend Parameter berücksichtigt worden, so daß die Vorhersagbarkeit von Entwicklungen durch *Unwissenheit* unmöglich gemacht wurde. Dies entsprach dem deterministischen Weltbild der damaligen Zeit. Wenn man alle Parameter und Variablen kennt, so mußte in diesem Weltbild auch jede mögliche Entwicklung voraussagbar sein. Genau dies drückt *Laplace* in seinem berühmten Konzept der allwissenden Intelligenz aus, das ich diesem Vortrag voranstellte. Nun wollen wir sehen, wie dieses Konzept schon bei einer erschreckend einfachen Gleichung wie der logistischen versagt.
Warum versagt es? Nun, an erster Stelle liegt das an einer Eigenschaft der Gleichung, die den *Humus* darstellt, auf dem der Dschungel des Chaos gedeiht: die **Nichtlinearität**.

2 Nichtlinearität

Wir haben eine *abhängige Variable y*, die von der *freien Variablen x* abhängt. *Aber wie?*
Diese Frage entspricht einer Differentialgleichung. Unsere Frage lautet dann:

$$\sum_{i=0}^{N} a_i \partial_x^i y \quad = \quad f \quad ? \tag{2}$$

Der obige Ausdruck ist eine *Differentialgleichung N-ten Grades von y in x.*
Die auftauchenden Variablen a_i sind die *Koeffizienten* der Differentialgleichung. f ist das *Störglied.* Nun gibt es zwei wichtige Fälle:

1. Die Koeffizienten hängen nicht von Ableitungen von y ab, sind also bezüglich der Ableitungen linear. Dann handelt es sich um eine **lineare** DGL.
2. Die Koeffizienten hängen teilweise von Ableitungen der abhängigen Variablen y ab, sind damit nicht mehr frei wählbar bezüglich den Ableitungen von y.
   Dann handelt es sich um eine **nichtlineare** DGL.

Man kann die logistische Gleichung umschreiben in

$$K\frac{\partial x}{\partial t}x - r(K-x)x = 0 \tag{3}$$

Und stellt fest:

- t ist **freie Variable**
- x ist **abhängige Variable von t**
- K und r sind **Parameter** der Gleichung und als solche frei wählbar.
- K ist **linearer Koeffizient** vor der ersten Zeitableitung.
- r(K-x) ist **nichtlinearer Koeffizient** vor x.

Damit ist die ganze Gleichung nichtlinear.
Was ist daran so erschütternd?

Linearität entscheidet, ob Chaos gedeiht oder nicht.

Denn eine lineare Differentialgleichung, so schwer sie zu lösen sein mag, **kann kein Chaos hervorbringen**!
Das liegt grob gesprochen daran, daß man Abweichungen von Systemen, mit verschiedenen Anfangsbedingungen nicht mehr beliebig klein kriegen kann, indem man die Anfangsbedingungen dicht beieinander wählt.

3 Rekursive Gleichungen

3.1 Fixpunkte, Orbits und Stabilität

Zurück zu unseren Büffeln auf der Insel: Angenommen, wir könnten nur einmal monatlich auf der Insel eine Büffelzählung veranstalten. Dann gehen wir von der *Differentialgleichung* in eine *Differenzengleichung* über, die uns nur über diskrete Zustände Auskunft gibt. Das machen wir, indem wir die Zeit t durch die diskrete Variable n ersetzen und die Gleichung in eine *rekursive* Form bringen:

$$x_{n+1} = \frac{rx_n(K - x_n)}{K} \tag{4}$$

Nun setzen wir noch $K = 1$ und erhalten:

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n) \tag{5}$$

Manchmal stellt man noch den Faktor 4 voran:

$$x_{n+1} = 4rx_n(1 - x_n) \tag{6}$$

Unter den beiden Formen (5) und (6) ist die logistische Gleichung allgemein bekannt.

Rekursive Gleichungen sind allgemein von der Form:

$$x_{n+1} = f(x_n) \tag{7}$$

Wenn man nun mit einem bestimmten *Startwert* x_0 beginnt, erhält man eine ganz bestimmte Folge von Zahlen, die auseinander durch Iteration der Rekursionsvorschrift (7) hervorgehen.
Die entstehende Folge nennt man einen *Orbit.* Eine Teilfolge eines Orbits ist ein *Suborbit.*
Weil f eindeutig ist, sind auch alle Orbits *eindeutig* und hängen nur vom gewählten **Startwert** ab!
Das impliziert, daß zwei Orbits, die einen gleichen Punkt enthalten, in fast allen Punkten **identisch** sind!
Man kann leicht einsehen, daßdann der eine Orbit im anderen vollständig enthalten ist. Würde man die Orbits auch nach vorne unbegrenzt lassen, so wären sie durch die Angabe *eines einzigen Punktes* **eindeutig festgelegt**.
Dies freut natürlich den Laplace'schen Dämon[1]
An einer rekursiven Gleichung sind besonders die *Fixpunkte* interessant. Das sind die Punkte, an denen die rekursive Abbildung schadlos vorübergeht, also:

$$\begin{aligned} & \tilde{a} \text{ ist} && \text{Fixpunkt} && \text{von } f \\ \Leftrightarrow\ & f(\tilde{x}) && = && \tilde{x} && (8) \\ \Leftrightarrow\ & \tilde{x}_{n+1} && = && \tilde{x}_n && (9) \end{aligned}$$

Ein Fixpunkt wird immer auf sich selbst abgebildet. Er ist "fixiert".
Fixpunkte können eine bestimmte Eigenschaft besitzen: Stabilität. über die *Stabilität eines Fixpunktes* entscheidet der **Betrag der Ableitung**:

$$\begin{aligned} \left|f'(\tilde{x})\right| &= 0 \\ &\Leftrightarrow \tilde{x} \text{ ist } \textit{superstabil} && (10) \\ \left|f'(\tilde{x})\right| &< 1 \\ &\Leftrightarrow \tilde{x} \text{ ist } \textit{stabil} && (11) \end{aligned}$$

[1]So nennt man den von Laplace formulierten Intellekt, der über alles Bescheid weiß.

$$
\begin{aligned}
\left|f'(\tilde{x})\right| &= 1 \\
&\Leftrightarrow \tilde{x} \text{ ist } \textit{neutral} && (12) \\
\left|f'(\tilde{x})\right| &> 1 \\
&\Leftrightarrow \tilde{x} \text{ ist } \textit{instabil} && (13)
\end{aligned}
$$

Die Eigenschaft der Stabilität hat folgende **Merkmale**:

- Ein *stabiler* Fixpunkt ist **anziehend**. Man nennt ihn dann einen *Attraktor*.
  Folgenglieder einer Rekursion werden von Attraktoren angezogen.
- Ein *instabiler* Fixpunkt ist **abstoßend**. Man nennt ihn dann einen *Repulsor*.
  Folgenglieder einer Rekursion werden von Repulsoren abgestoßen.
- Bei einem *neutralen* Fixpunkt ist es der Folge **völlig egal**, ob er in der Nähe ist oder nicht.
- Bei einem *superstabilen* Fixpunkt streben alle Folgenglieder wie besessen auf ihn zu.

Gleichung (8) definiert einen Fixpunkt **erster Ordnung**. Man kann nun verallgemeinernd auch *Fixpunkte höherer Ordnung* definieren:

$$
\begin{array}{rccl}
 & \tilde{x} \text{ ist Fixpunkt} & \text{m-ter} & \text{Ordnung} \\
\Leftrightarrow & \tilde{x} \text{ ist } \textbf{nicht} & \text{(m-1)-ter} & \text{Ordnung und es gilt:} \qquad (14) \\
 & f^{[m]}(\tilde{x}) & = & \tilde{x} \qquad (15) \\
\Leftrightarrow & \tilde{x}_{n+m} & = & \tilde{x}_n \qquad (16)
\end{array}
$$

Wobei $f^{[m]} = f(f(\ldots f(x)\ldots))$ die *m-te Iterierte von* f ist.
Die Ausschließung in (14) ist notwendig, damit die Definition eindeutig ist. Sonst wären Fixpunkte m-ter Ordnung automatisch auch Fixpunkte höherer Ordnung, weil (15) erfüllt ist.
Es muß nicht unbedingt Fixpunkte m-ter Ordnung geben. Das Kriterium dafür ist, ob die m-te Iterierte die Halbierende des ersten Quadranten schneidet. Doch dazu später.
Man sieht schon an (16), daß Fixpunkte höherer Ordnung einen *periodischen Orbit* erzeugen:
Ein Fixpunkt m-ter Ordnung wird nach m Iterationen von f auf sich selbst abgebildet. Nach weiteren m Iterationen wieder auf sich selbst und so weiter und so weiter... Da ein Orbit **eindeutig** ist, müssen sich auch die dazwischenliegenden Punkte wiederholen. Auch sie müssen sich natürlich nach *exakt* m Perioden wiederholen, sind also selbst Fixpunkte m-ter Ordnung. Daraus folgt wiederum: **Wenn** es einen Fixpunkt m-ter Ordnung gibt, dann muß es offenbar **mindestens m** Fixpunkte m-ter Ordnung geben.
Fazit:

- Wenn es einen Fixpunkt m-ter Ordnung von f gibt, dann gibt es noch mindestens (m-1) weitere Fixpunkte m-ter Ordnung, die mit ihm zusammen einen periodischen Orbit der Periode m bilden.
- Wenn ein Orbit einen Fixpunkt m-ter Ordnung enthält, so ist er periodisch mit der Periode m und enthält nur Fixpunkte m-ter Ordnung.

Es gibt auch die *Stabilität von Fixpunkten m-ter Ordnung*:

> $\tilde{x}$ ist Fixpunkt m-ter Ordnung von f
> Dann gilt:

$$
\left|f^{[m]}(\tilde{x})\right| \begin{cases} = 0 & \Leftrightarrow \quad \tilde{x} \text{ ist superstabil} \\ < 1 & \Leftrightarrow \quad \tilde{x} \text{ ist stabil} \\ = 1 & \Leftrightarrow \quad \tilde{x} \text{ ist neutral} \\ > 1 & \Leftrightarrow \quad \tilde{x} \text{ ist instabil} \end{cases}
$$

Und schließlich gibt es noch die *Stabilität von periodischen Orbits*, die sich nach der **höchsten Stabilität seiner Fixpunkte** richtet.

Wenn f im Definitionsbereich **nicht umkehrbar eindeutig** ist, dann gilt das bisher Gesagte nicht, weil man dann von einem Folgenglied nicht eindeutig auf das vorhergehende schließen kann.

> Dies ist eine interessante Sache! Der Laplace'sche Dämon wäre am Ende mit seiner Weisheit, bereits wenn irgendwelche Gesetze in der Physik **nicht umkehrbar eindeutig** wären. Dann könnte nämlich die Vergangenheit nicht "seinen Augen gegenwärtig"sein!

Wie sieht es mit der Stabilität der Fixpunkte m-ter Ordnung aus?
Mit der Kettenregel erhalten wir für die 2. Ordnung:

$$f^{[2]\prime}(x) \quad = \quad f'(f(x)) \cdot f'(x) \tag{17}$$

Da uns zwei Fixpunkte zweiter Ordnung $\tilde{x}_1$ und $\tilde{x}_2$, wie wir eben gesehen haben, einen 2-periodischen Orbit generieren, folgt:

$$f(\tilde{x}_1) \quad = \quad \tilde{x}_2 \tag{18}$$

$$\text{Sowie} \quad f(\tilde{x}_2) \quad = \quad \tilde{x}_1 \tag{19}$$

Damit folgt für die Ableitung an den beiden Fixpunkten:

$$f^{[2]}(\tilde{x}_1) \quad = \quad f'(f(\tilde{x}_1)) \cdot f'(\tilde{x}_1) \tag{20}$$

$$= \quad f'(\tilde{x}_2) \cdot f'(\tilde{x}_1) \tag{21}$$

$$\text{und} \quad f^{[2]}(\tilde{x}_2) \quad = \quad f'(\tilde{x}_1) \cdot f'(\tilde{x}_2) \tag{22}$$

$$\text{Also gilt} \quad f^{[2]}(\tilde{x}_1) \quad = \quad f^{[2]}(\tilde{x}_2) \tag{23}$$

Damit ist die **Stabilität zweier Fixpunkte, die einem Orbit bilden, gleich!**
Man kann nun allgemein zeigen, daß dies für Fixpunkte 2^m-ter Ordnung ebenfalls gilt. Es zeigt sich nämlich:

$$(\partial_x f^{[2^m]})(x) \quad = \quad (\partial_x f)(x) \cdot \prod_{i=0}^{m-1} \left[(\partial_x f^{2^i})(f^{2^i}(x)) \right] \tag{24}$$

Diese Gleichung geht übrigens aus der **Selbstähnlichkeit** der in (17) angewandten Kettenregel hervor. Mit etwas überlegung gelangt man auf den Zusammenhang (24) und kann ihn dann mithilfe der vollständigen Induktion auch beweisen.
Was für die beiden Fixpunkte 2. Ordnung gilt, gilt wegen der iterierten Anwendung der Kettenregel auch für die Fixpunkte 4. Ordnung, 8. Ordnung, ..., 2^m. Ordnung: Sie haben die gleiche Ableitung. Da die Ableitung ein Maß für die Stabilität ist, folgern wir:

Fixpunkte 2^m-ter Ordnung haben gleiche Stabilität

Damit hat auch ein Orbit der Periode 2^m diegleiche Stabilität wie alle seine Fixpunkte. Da wir nun wissen, daß die Funktion f am Punkt $\tilde{x}_0 = 0,5$ die Ableitung Null hat, sehen wir mit einem Blick auf (24), daß dann auch die Ableitung der 2^m-ten Iteration von f Null ergibt, was bedeutet, daß **alle Orbits, die $\tilde{x}_0 = 0.5$ als Fixpunkt enthalten, *superstabile* periodische Orbits sind.**
Den Wert des Parameters r, an dem der Orbit der Periode 2^m superstabil wird, nennt man *Superstabilitätspunkt R_m*.
Superstabilitätspunkte kann man numerisch besonders gut bestimmen, weil sie eine rasche Konvergenz der Orbits bewirken. Diese Erkenntnis wird uns sehr nützen.

So! Jetzt haben wir viel über Fixpunkte aller möglicher Ordnung, Orbits und Stabilitäten geredet, was bedeutet das aber für unsere Büffel?

3.2 Bifurkationen, Selbstähnlichkeit und Feigenbaumkonstanten

3.2.1 Aussterben

Welche Fixpunkte erster Ordnung bietet die logistische Gleichung?
Die Bedingung lautet (siehe (8):

$$\tilde{x} \quad = \quad r\tilde{x}(1 - \tilde{x}) \tag{25}$$

Dies liefert die Fixpunkte

$$\tilde{x}_1 \quad = \quad 0 \tag{26}$$

$$\tilde{x}_2 \quad = \quad 1 - \frac{1}{r} \tag{27}$$

Deren Stabilität entspricht der Ableitung:

$$f'(x) = r(1-2x) \tag{28}$$

Ausgewertet an den beiden Fixpunkten und als Betrag:

$$\left|f'(\tilde{x}_1)\right| = r \tag{29}$$

$$\left|f'(\tilde{x}_1)\right| = |2-r| \tag{30}$$

Wir sehen:
Für $\boxed{r < 1}$ ist x=0 **stabiler** Fixpunkt, wenn auch wegen (30) nicht *superstabil*.
Unsere Büffelherde wird allmählich aussterben. Das entspricht natürlich auch der Wahrheit: wenn das Verhältnis von Geburtenrate zu Sterberate kleiner als Eins ist, stirbt die Population mit Sicherheit aus.
Der Laplace'sche Dämon, der alles sehr genau nimmt, hakt ein und ruft: "Halt! Wenn die Büffelpopulation den Wert $\tilde{x}_2$ hat, bleibt sie am Leben und verändert sich nie!"
Was kann man ihm entgegenhalten?

3.2.2 Rationale und Irrationale Zahlen

Rationale Zahlen haben die Form:

$$z_{rat} = \frac{n}{m} \quad \text{wobei } m, n \in | N \tag{31}$$

Reelle Zahlen haben die Form:

$$z_{reell} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \tag{32}$$

Wobei (a_n) und (b_n) unbegrenzt wachsende Folgen von natürlichen Zahlen sind, deren Quotient aber eine *konvergente* Folge bildet. **Irrationale Zahlen** sind reelle Zahlen, die nicht rational sind.

Angenommen, ich habe einen Pfeil und werfe ihn auf eine Zielscheibe, die aus reellen Zahlen besteht. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, daß ich eine *rationale* Zahl treffe?

Beide Zahlenmengen sind von *unendlicher* Mächtigkeit. Außerdem liegen die rationalen Zahlen *dicht* in den reellen Zahlen, was bedeutet, daß zwischen je zwei reellen Zahlen *immer* eine rationale Zahl liegt.
Man könnte nun denken: Hmmm.....fifty-fifty?
Dazu folgende überlegung:
Die Menge der rationalen Zahlen ist *abzählbar unendlich*, was bedeutet, es gibt eine umkehrbar eindeutige Abbildung der rationalen Zahlen auf die natürlichen Zahlen. Die Menge der irrationalen Zahlen ist *überabzählbar unendlich*, was bedeutet, daß es diese Abbildung nicht gibt. *Georg Cantor* hat damit 1873 beweisen könen, daß die Mächtigkeit der reellen Zahlen **größer** ist als die der rationalen Zahlen.
Die Wahrscheinlichkeit *durch Zufall* eine rationale Zahl zu treffen berechnet sich nun gemäß der Wahrscheinlichkeitslehre aus dem Quotienten der Mächtigkeit der Ereignismenge E mit der Mächtigkeit der Ergebnismenge Ω:

$$P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} \tag{33}$$

Da nun die Rationalen Zahlen eine **Nullmenge** in den reellen Zahlen bilden, was bedeutet, daß ihre Mächtigkeit niedrigerer Ordnung ist, ist die Wahrscheinlichkeit **exakt Null**.
Dies ist wieder eine erstaunliche Tatsache: Wir rechnen zwar in der Physik ständig mit endlichen Dezimalzahlen, also rationalen Zahlen, **die Wirklichkeit kennt aber nur irrationale Zahlen**. Jedenfalls immer da, wo der Zahlenvorrat **kontinuierlich** ist!
Somit hat unsere Büffelherde im wahrsten Sinne des Wortes **keine reale überlebenschance**.

Diese Sache mit den rationalen und irrationalen Zahlen muß man immer im Kopf haben, wenn es um das deterministische Chaos geht!

3.2.3 Stabiles Gleichgewicht

Wir überlegen uns, wie wir der Büffelpopulation helfen können, geben ihr etwa zusätzliche Nahrung oder medizinische Unterstützung, und steigern so ihre *Zuwachsrate*.
Nun übersteigt die Büffelpopulation den Wert Eins. Damit wird $\tilde{x}_1 = 0$ zum **instabilen** und $\tilde{x}_2 = 1 - 1/r$ zum **stabilen** Fixpunkt.
Die Population nähert sich also einem konstanten Wert 1-1/r. Dieser Wert ist ein *punktförmiger Attraktor* und die Population befindet sich nach einigen Iterationen sehr dicht an ihm dran und damit in einem *stabilen Gleichgewicht*.
Für einen Wert von $r = 2$ lautet der Fixpunkt $\tilde{x} = 0,5 = \tilde{x}_0$, damit wird der Orbit, der hier die Periode $2^0 = 1$ hat, *superstabil* und wir erhalten als **Superstabilitätspunkt**:

$$R_0 = 2 \tag{34}$$

Wir steigern die Lebensbedingungen der Büffel weiter und erreichen den Wert 3. Hier wird er zu einem **neutralen Fixpunkt**. Und nun passiert folgendes:

3.2.4 Erste Bifurkationen

Wie wir mit (30) sehen, wird der Fixpunkt $\tilde{x}_2 = 1 - 1/r$ für $\boxed{r > 3}$ **instabil**. Also verwandelt er sich vom Attraktor zum Repulsor und die Population sucht sich eine andere Größe aus, gegen die sie strebt. Es bieten sich gleich zwei **Fixpunkte zweiter Ordnung** an. Fixpunkte zweiter Ordnung findet man durch Lösen der Gleichung:

$$f^{[2]}(\tilde{x}) = \tilde{x} \tag{35}$$

In unserem Fall ist das eine **Gleichung 4. Grades**, die allerdings wegen den bereits bekannten Fixpunkten 1. Ordnung $\tilde{x}_1 = 0$ und $\tilde{x}_2 = 1 - 1/r$ in eine quadratische Gleichung überführt werden kann. Denn *alte* Fixpunkte lösen natürlich auch die *neuen* Gleichungen. Die beiden *neuen* Fixpunkte sind, wie sich zeigt, stabil. Also wird der Wert der Population von **beiden zugleich** angezogen und man beobachtet, daß die Population **periodisch** wird. Sie *pendelt* zwischen den beiden Fixpunkten zweiter Ordnung hin und her, bzw. nähert sich ihnen abwechselnd immer weiter an. Damit wir der Attraktor in zwei Punkte gespalten. Diese Aufspaltung nennt man eine *Bifurkation*. Den Wert des Parameters r, an dem die Bifurkation stattfindet nennt man *Bifurkationspunkt*:

$$r_1 = 3 \tag{36}$$

Für den **Superstabilitätspunkt** erhalten wir numerisch:

$$R_1 = 3,2360679\ldots \tag{37}$$

Wenn man die Entwicklung der Population **kontinuierlich** betrachten würde, ergäbe sich eine periodische Funktion, die in einem *Phasenraum*, d.h einem Raum, der durch die Größen, die den Zustand eindeutig bestimmen, aufgespannt wird, als Ring erscheinen würde. Daher nennt man einen solchen Attraktor einen *Ringattraktor*.
Dies würden Biologen noch zustimmend begrüßen. Periodische Entwicklungen werden in der Natur häufig beobachtet, gerade wenn es um Räuber-Beute-Systeme geht.

Aber wir lassen die Zuwachsrate immer weiter anwachsen und beobachten eine weitere **Bifurkation** bei einem Wert von

$$r_2 = 3,498561699\ldots \tag{38}$$

Dort werden die beiden bisherigen Fixpunkte zugleich instabil, was uns nach unseren Vorüberlegungen nicht mehr wundert, denn Fixpunkte 2^m. Ordnung werden *immer* zugleich instabil. Nun haben wir **vier** stabile Fixpunkte 4. Ordnung, zwischen denen die Population schwankt. Sie nähert sich einem stabilen Orbit der Periode 4 an, welcher den Attraktor für dieses System darstellt. Auch ein solcher Attraktor ist in einem kontinuierlichem Phasenraum **ringförmig**.
Der **Superstabilitätspunkt** liegt bei

$$R_2 = 3,498561699\ldots \tag{39}$$

Wir lassen uns nicht beirren und steigern die Zuwachsrate immer weiter.
Die nächsten Bifurkationen erfolgen in immer geringerem Abstand und ihre Periode verdoppelt sich jedesmal. Wir erhalten eine *Kaskade von Bifurkationen.*
Hier schüttelt der Biologe den Kopf und sagt:"Nein, also das ist unrealistisch. Hier überschreiten wir die Gültigkeit des mathematischen Modells."
Aber überschreiten wir ihn tatsächlich? Noch ist die Entwicklung periodisch.

3.2.5 Chaos

Bei einem endlichen irrationalen Wert von $r_\infty = 3.5699\ldots$ erreicht die Periode den Wert **unendlich**. Ab hier regiert das ***Chaos***. Was bedeutet das?

Nun, zunächst einmal bedeutet das, daß wir *unendlich* viele Fixpunkte der Ordnung *unendlich* haben, die zudem noch ihre Stabilität in *unendlicher* Sensibilität von r verändern und abstoßen und anziehen, kein Mensch weiß wann und wie.
Kein Mensch?
Aber vielleicht der Laplace'sche Dämon ....?
In wie *unendlich* viele Punkte gabelt sich der Attraktor, den wir nun als *setsamen Attraktor*, bezeichnen, auf. Man kann zeigen, daß es *überabzählbar unendlich* viele Punkte sind. Das liegt daran, daß ihre Zahl *exponentiell* wächst und damit keine Möglichkeit der Abbildung auf eine abzählbare Menge gegeben ist. Heißt das denn, das sie ein **Kontinuum** bilden? Die Antwort lautet: **Nein!**
Wie kann das sein? Eine *überabzählbare* Menge von Punkten, die noch dazu *unendlich dicht* beieinanderliegen und dennoch *kein Koninuum* bilden!
Dazu müssen wir uns den Kopf zerbrechen:

4 Fraktale

4.1 Erzeugung

Der US-amerikanische Mathematiker *Benoît B. Mandelbrot* schuf 1977 den Begriff *Fraktal.* Er formalisierte die Erzeugung von Mengen, die man schon bereits seit über 100 Jahren kennt, aber nie recht ernst nahm und entdeckte ihre Bedeutung für die physikalische Realität.
Die Erzeugung eines Fraktals geschieht auf folgende Weise:

1. Man nehme eine Ausgangsmenge von Punkten, den *Initiator.*
2. Man ersetze bestimmte Teilmengen des Initiators durch andere Mengen, die *Generatoren*, die in verkleinertem Maßstab die ersetzten Teilmengen enthalten.
3. Man verfahre wie in 2 mit den verkleinerten Teilmengen bis zur Unendlichkeit.

Das Ergebnis ist ein *Fraktal.* Wir wollen uns einige Beispiele anschauen.
Von *Cantor* stammt die Definition einer besondere Menge, die man als *Cantor-Staub* bezeichnet:

- Man nehme eine Strecke der Länge 1:
- Man entferne das mittlere Drittel:
- Man entferne von den beiden *übriggebliebenen* Strecken jeweils das mittlere Drittel:
- Man wiederhole obige Prozedur bis zur *Unendlichkeit.*

Das Ergebnis ist eine Menge, die man als *Cantor-Staub* bezeichnet und die man in Abb. 1 bewundern kann.
Sie hat unter anderem folgende Eigenschaften:

1. Sie enthält *überabzählbar viele* Punkte
2. Sie hat das Maß Null

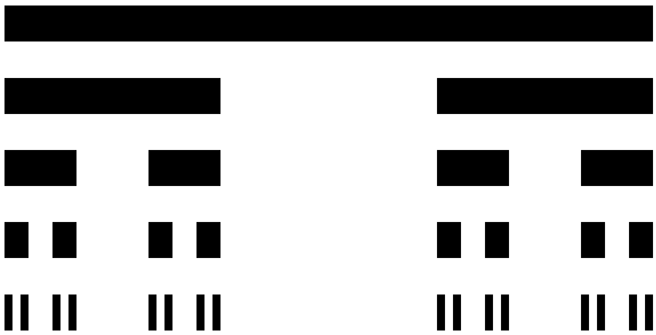

Abbildung 1: Cantorsches Staubfraktal.

Als Cantor diese Eigenschaften *beweisen* konnte, stieß er auf großen Widerstand und sogar heftigen Zorn. Aber es läßt sich nicht ändern und heute bezweifelt niemand mehr diese Eigenschaften.
Nun könnte man einwenden: "Ja, aber diese Menge wird ja *zerstückelt*. Aber die Bifurkationszweige *erfüllen* doch das Intervall (0,1)!"Wir werden nun ein Fraktal konstruieren, welches ebenfalls ein Intervall *auffüllt*, welches *überabzählbar viele* Punkte enthhält und **trotzdem** nicht kontinuierlich ist.

- Man nehme zwei Endpunkte eines Intervalls:
  . .
- Man füge in die Mitte des Intervalls einen Punkt ein:
  . . .
- Man füge in die Mitte der sich ergebenden Intervalle einen Punkt ein:
  . . . . .
- Man wiederhole Schritt 3 bis ins Unendliche:

Das Ergebnis ist ein Fraktal, welches an die *Intervallschachtelung* erinntert. Nennen wir es *Sandfraktal*.
Es hat folgende Eigenschaften:

1. Es enthält *überabzählbar viele* Punkte.
2. Es besteht aus einer *dichten* Menge von Punkten.
3. Es hat überabzahlbar viele Lücken.

Wir werden kurz den Beweis skizzieren:

Zu 1: Die Zahl der Punkte der n-ten Iteration beträgt $N = \sum_{i=0}^{n} 2^i$.
Dies ist größer als 2^n. Da die Potenzmenge einer n-elementigen Menge stets 2^n Elemente hat, ist N größer als die Zahl der Elemente der Potenzmenge einer n-elementigen Menge.
Die Potenzmenge einer unendlichen Menge ist von höherer Mächtigkeit als die Menge selbst, ihre Kardinalzahl ist um 1 Ordnung höher.
Die Anzahl der Iterationenen ist abzählbar, also ist die Anzahl der Punkte mindestens überabzählbar. Nach Cantor ist sie auch *höchstens* überabzählbar, denn N hat im Grenzfall den Wert der transfiniten Zahl $\aleph_0$, außerdem gilt: $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ und eine unendliche Summe von Zahlen der Größe $\aleph_1$ ist wieder von der Größe $\aleph_1$.

Zu 2: Die Punkte der n-ten Iteration lassen sich auf *endliche Binärbrüche*im Intervall (0,1) abbilden:
$z_{bin} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{4} \pm \frac{1}{8} \pm \ldots + \frac{1}{2^n}$
Sie sind damit *rationale Zahlen* in Binärdarstellung und als solche *dicht* im Intervall (0,1).

Zu 3: Die *Komplementmenge* der Cantorschen Staubmenge enthält für jede Iteration ein Intervall der Länge $1/3^n$ in der Mitte des übriggelassenen Intervalls. Die Punkte der n-ten Iteration des Sandfraktals liegen genau *in der Mitte* dieser Intervalle. Die Wegschneidungen lassen im Grenzfall die Cantorsche Menge übrig. Also läßt das Sandfraktal *mindestens* die Cantorsche Menge übrig. Die Cantorsche Menge ist überabzählbar und unzusammenhängend, also kann das Sandfraktal kein zusammenhängendes Kontinuum bilden, sondern hat an überabzählbar vielen Stellen *Lücken*.

4.2 Hausdorff-Dimensionen

Es gibt eine weitere seltsame Eigenschaft von Fraktalen:
Ihre Dimension ist nicht immer ganzzahlig.
Betrachten wir folgendes Fraktal:
Wir nehmen nun als Initiator eine Linie. Darauf errichten wir im mittleren Drittel ein Zelt mit drei gleichlangen Seiten. Auf den nun entstandenen 4 Linien errichten wir wieder ein Zelt usw. (siehe Abb. 2).

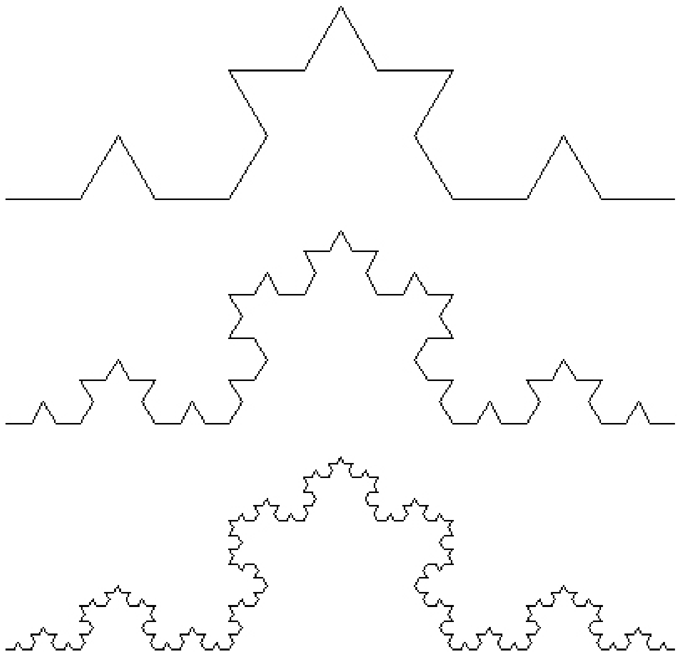

Abbildung 2: Konstruktion der Kochkurve

Das Ergebnis nennt man die *Koch-Kurve* und wir überlegen uns: **Wie lang ist die Kochkurve**?
Der Initiator habe die Länge 1. Der Generator besteht aus 4 Linien der Länge 1/3. Also hat die erste Iteration des Fraktals die Länge 4/3. Auf jeder Linie wird wieder der Generator angewandt, somit beträgt die Länge der n-ten Iteration:

$$L_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n \tag{40}$$

Und leider müssen wir feststellen:

$$L_n \longrightarrow \infty \quad \text{für } n \to \infty \tag{41}$$

Die Länge der Kochkurve ist tatsächlich *unendlich*, obwohl wir sie direkt vor Augen haben! Hier scheinen unsere Begriffe vom *Maßstab* zu versagen. Dazu folgende überlegung:
Wenn wir die Länge eines zweidimensionalen Objektes, also einer Kurve, messen wollen, brauchen wir einen

Maßstabselement, legen es entlang der Kurve an und zählen, wie oft wir das machen können. Je kleiner unser Maßstabselement wird, um so genauer wird unsere Messung sein. Wir drücken dies Verhältnis aus durch:

$$\lim_{n\to\infty} N_n \cdot r_n \quad = \quad C \tag{42}$$

Wobei N_n die Anzahl von Maßstabselementen der Länge r_n ist, die in die Kurve der Länge C passen. Für eine endliche Kurve ist $C < \infty$. Für ein *zweidimensionales* Objekt wäre das Maßstabselement ebenfalls zweidimensional, so daß unsere Messung lautete:

$$\lim_{n\to\infty} N_n \cdot (r_n)^2 \quad = \quad C \tag{43}$$

Wobei die Elemente die *Seitenlänge* r hätten. Man kann das nun auf beliebige Dimensionen D verallgemeinern und schreiben:

$$\lim_{n\to\infty} N_n \cdot (r_n)^D \quad = \quad C \tag{44}$$

Die von *Hausdorff* vorgeschlagene Idee besteht darin, diese Beziehung auch für **nichtganzzahlige** Dimensionen D gelten zu lassen! Somit erhält man durch Auflösen der Gleichung die Definition der *Hausdorff-Dimension*:

$$D_H \quad = \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\ln C - \ln N_n}{\ln r_n} \tag{45}$$

$$\quad = \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\ln N_n}{\ln \frac{1}{r_n}} \tag{46}$$

Diese Beziehung gilt nur, wenn alle N Maßstabselemente gleich groß sind, d.h. um den gleichen *Skalierungsfaktor* s verkleinert werden. Es gibt eine weitere Verallgemeinerung auf Maßstabselemente, die um verschiedene Skalierungsfaktoren verkleinert werden:

$$\sum_{i=1}^{k} s_i^D \quad = \quad 1 \tag{47}$$

Wobei die s_i die beteiligten Skalierungsfaktoren sind.
Damit läßt sich ganz leicht die Dimension der Kochkurve bestimmen:
Die 1. Iteration des Fraktals besteht aus 4 Segmenten der Länge 1/3. Also besteht die n-te Iteration aus $N_n = 4^n$ Segmenten der Länge $r_n = (1/3)^n$ und man erhält für die Dimension der Koch-Kurve:

$$D \quad = \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n \ln 4}{n \ln 3} \tag{48}$$

$$\quad = \quad 1,261859\ldots \tag{49}$$

Damit ist diese eigenartige Kurve also mehr als eine Kurve und weniger als eine Fläche. Sie liegt irgendwo *dazwischen.*
Beim Cantor-Staub erhalten wir mit $N_n = 2^n$ Segmenten der Länge $r_n = (1/3)^n$:

$$D \quad = \quad \frac{\ln 3}{\ln 2} \tag{50}$$

$$\quad = \quad 0,63092\ldots \tag{51}$$

Der Cantor-Staub ist also mehr als ein Haufen Punkte aber weniger als eine Linie.
Diese Verfahren der Dimensionsbestimmung funktioniert nur, wenn die fraktalen Objekte zumindest *im Grenzfall* eine *Selbstähnlichkeit* aufweisen. Das bedeutet, daß man bestimmte Auschnitte der Ursprungsmenge in skalierter Größe bei jeder Iteration immer *wiederfinden* können muß. Wenn eine bestimmte Operation an einem Objekt *rekusiv* immer wieder durchgeführt wird, so weist das entstehende Objekt zwangsläufig *Selbstähnlichkeit* auf. Im Falle der künstlich hergestellten Fraktale haben wir die Konstruktionsmethode selbst entworfen und wissen daher, wo die Selbstähnlichkeit steckt. Bei *gegebenen* Objekten muß man oftmals ziemlich suchen und hoffen, daß eine Selsbtähnlichkeit in ihnen steckt, die die analytische Betrachtung ermöglicht.

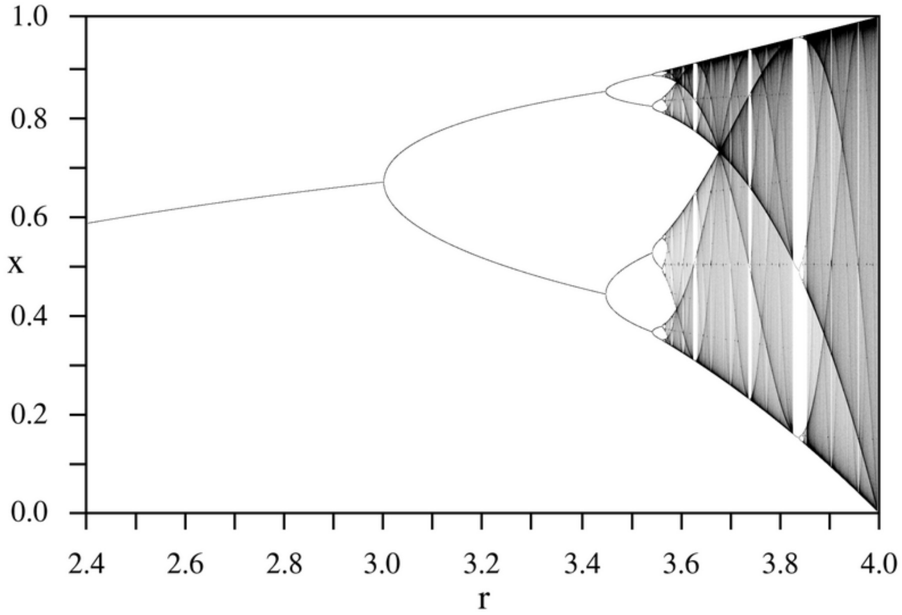

Abbildung 3: Bifurkationsdiagramm der logistischen Gleichung.

Wo steckt denn in unserem Bifurkationsbaum die Selbstähnlichkeit? In der Tat haben wir sie schon entdeckt, als wir nämlich die Ableitung der 2^m-ten Iterierten von f betrachteten. Hier haben wir nämlich die Kettenregel immer wieder angewandt und erhielten dadurch einen Ausdruck, der uns die Stabilität aller Fixpunkte eines 2^m-periodischen Orbits lieferte. Und genau die **stabilen 2^m-periodischen Fixpunkte** sind es ja, die wir im Bifurkationsdiagramm gegen den Parameter auftragen! Also muß im Baum *Selbstähnlichkeit* liegen. Wir müssen nur eine geeignete Stelle finden, die sich immer wieder abbildet, dann bestimmen wir den Skalierungsfaktor und – zack! – haben wir die fraktale Dimension des Attraktors im chaotischen Bereich des Bifurkationsbaumes.
Nun kommen die *Superstabilitätspunkte* zur Geltung. Sie sind eine gute Orientierung, weil sie numerisch schnell zu finden sind. Nehmen wir einen superstabilen Orbit der Periode 2^m beim Parameterwert R_m und vergleichen den **Abstand der beiden Punkte, die auf der halben Periode des Orbits liegen**. Und tatsächlich stellen wir fest: *Dieser Abstand verkleinert sich um einen bestimmten Skalierungsfaktor*! Allerdings ist dieser Faktor erst im Grenzwert konstant, das reicht uns aber auch und wir erhalten:

$$\alpha_n = \left| \frac{x^n_{P/2} - x^n_1}{x^{n+1}_{P/2} - x^n_1} \right| \tag{52}$$

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \alpha_n \tag{53}$$

Man setzt gerne den *Anfang* des superstabilen Orbits auf den immer darin enthaltenen superstabilen Fixpunkt 1. Ordnung, den wir mit $\tilde{x}_0$ bezzeichnet haben:

$$x^n_1 = \tilde{x}_0 \tag{54}$$

$$= 0.5 \tag{55}$$

Die Konstante α wird nach dem US-amerikanischen Mathematiker *Mitchell J. Feigenbaum* als *Feigenbaumkonstante* bezeichnet. Sie hat **universellen** Charakter, tritt also an sehr vielen Stellen auf, bei denen Chaos eine Rolle spielt, sowohl in der Mathematik als auch in der Physik. Da wir eben eingesehen haben, daß die Konstante mit der *Selbstähnlichkeit der iterierten Kettenregel* zusammenhängt, können wir behaupten, sie spielt überall da eine Rolle, wo die iterierte Kettenregel eine Rolle spielt. Und das ist verdammt häufig! Eigentlich bei allen nichtlinearen Differenzialgleichungen. Und da im Grunde die Natur aus fast nichts anderem besteht als unendlich gut numerisch gelösten nichtlinearen Differenzialgleichungen, so können wir

tatsächlich sagen, daß **sich die Feigenbaumkonstante überall in der Natur wiederfindet**.
Es gibt noch eine Selbstähnlichkeit im Bifurkationsbaum:
Der Abstand zweier aufeinanderfolgender *Bifurkationspunkte* verkleinert sich ebenfalls um einen Skalierungsfaktor, der im Grenzfall konstant ist. Diese Konstante wird als *Feigenbaumkonstante* δ bezeichnet und lautet:

$$\delta_n = \frac{r_n - r_{n-1}}{r_{n+1} - r_n} \tag{56}$$

$$\delta = \lim_{n\to\infty} \delta_n \tag{57}$$

Und im selben Verhältnis verkürzt sich auch der Abstand zweier *Superstabilitätspunkte*, die leichter zu finden sind, also gilt auch:

$$\delta_n = \frac{R_n - R_{n-1}}{R_{n+1} - R_n} \tag{58}$$

Wenn wir nun die besagten superstabilen Orbits der Periode 2^m in der graphischen Darstellung des *Bifurkationsbaumes* betrachten, so erkennen wir, daß sich die vorhergehende Verästelung um den Faktor von etwa 2,5 verkleinert unten wieder findet und um den Faktor $2,5^2$ oben.
Damit lautet die Gleichung (47):

$$(2,5)^D + (2,5^2)^D = 1 \tag{59}$$

Und dies wird gelöst durch:

$$D = 0,525\ldots \tag{60}$$

Eine genauere Analyse[2] mit den korrekten Skalierungsfaktoren ergibt den Wert

$$D = 0,538\ldots \tag{61}$$

Dies ist also die Dimension des Attraktors, gegen den die ahnungslose Büffelherde sich entwickelt, wenn wir die Zuwachsrate über $r = 3, 3,5699\ldots$ steigern! Wer hätte dies gedacht? Was bedeutet das aber nun eigentlich für die *tatsächliche Entwicklung* der Büffelherde?

5 Chaos-Bänder

Das Chaos schleicht sich auf leisen Tatzen heran. Unmerklich beginnen die bisher periodisch scheinenden unteren und oberen Bereiche unregelmäßig zu verhalten. Sie bilden sogenannte *Chaos-Bänder*. Man kann zwar nie *genau* sagen, wohin die Entwicklung geht, aber man kann immerhin noch einen *Bereich* angeben, in dem sich die nächsten Iterationen befinden. Diese Bänder dehnen sich mit steigendem Parameter r immer weiter aus und berühren sich schließlich, so daß nun überall im Intervall Chaos herrscht. Jetzt ist wirklich alles möglich. Jetzt herrscht das *totale Chaos*. Aber was heißt hier eigentlich "alles möglich?"

6 Unvorhersagbarkeit

Im Bereich des Chaos herrscht folgende Situation: Es gibt überabzählbar unendlich viele Attraktorpunkte, die ein fraktales Muster bilden und von ständig wechselnder Stabilität sind. Damit kann das System keinem irgendwie gearteten Zustand mehr zustreben.
Zudem liegen die Attraktorpunkte *dicht* beieinander überall im Intervall (0,1) und werden aufeinander abgebildet, so daß beliebig dicht in der Nähe liegenden Punkte ebenfalls irgendwohin abgebildet werden.
Das System wird seine Entwicklung *unvorhersehbar* fortsetzen.

"HALT!"ruft der Laplace'sche Dämon und erhebt sich von seinem Canapé, auf dem er bislang behäbig gelegen hat. "Was heißt hier *unvorhersagbar*? Die Abbildung ist nach wie vor *eindeutig* und die n-te Iteration entspricht einem Polynom 2^n. Grades, denn die Ausgangsgleichung war ein Polynom 2. Grades. Also

[2] P. Grassberger: "On the Hausdorff dimension of fractal attractors", J. stat. Phys. **26** 173-179

läßt sich der n-te Punkt eines Orbits nicht nur *einzeln* berechnen, sondern die *ganze Abbildung* läßt sich analytisch **hinschreiben**!"
Was sagen wir darauf?
Er hat recht, man könnte die n-te Iteration von f wirklich hinschreiben und hat damit die **eindeutige Abbildung jeglicher Startwerte auf den n-ten iterierten Wert**. Man hat gewissermaßen mit dieser Abbildung die (diesmal wirklich) **kontinuierliche Menge aller denkbaren Orbits**! Wo bleibt die Unvorhersagbarkeit?
Eben noch schien der Laplace'sche Dämon am Ende zu sein, jetzt triumphiert er. Um ihm das Grinsen zu verderben, sollten wir über die *Unvorhersagbarkeit* nachdenken.

Wir haben einen *Ausgangszustand* Ψ. Wir haben irgendeinen unbekannten Vorgang, der irgendetwas mit diesem Ausgangszustand macht und hinterher haben wir einen *Endzustand* Ψ'.

$$\Psi \longrightarrow \boxed{\quad ? \quad} \longrightarrow \Psi'$$

Wir definieren nun:

> *Wir können den Zustand Ψ' **vorhersagen**, wenn wir den Ausgangszustand Ψ und die Funktionsweise des Apparates A genau kennen.*

Nun, den Vorgang kennen wir *sehr* genau, er besteht hier aus einer eindeutigen Abbildung, der logistischen Gleichung. Nun fragt sich nur noch wie genau wir den *Ausgangszustand* kennen.
Wir haben eben gesehen, daß wir zwar *theoretisch* den Wert der n-ten Iteration jedes beliebigen Ausgangswertes berechnen können, aber im chaotischen Bereich beliebig dicht beieinanderliegende Punkte beliebig weit voneinander entfernt abgebildet werden. Das heißt: ein *beliebig kleines Intervall*[3]wird auf das **gesamte** Intervall (0,1) abgebildet. Wenn wir also irgendeine Ungewißheit, und sei sie auch noch so klein, bezüglich des Ausgangszustands haben, so wird der unsere Vorhersage beliebig wertlos sein. Alle Berechnungsmethoden, die wir anwenden können, lassen sich nur auf einen *winzigen Haufen* von rationalen Zahlen anwenden. Selbst die tolle Genauigkeit, mit der wir etwa die Zahl Pi kennen, hilft uns bei einem bestimmten Grad an Chaos nicht mehr weiter. Wie wir aber schon festgestellt haben, ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein System, welches eine *kontinuierliche* Menge an Werten annehmen kann, einen *rationalen* Wert annimmt, exakt gleich Null.**Damit ist auch unsere Möglichkeit, die Entwicklung eines chaotischen Systems über beliebig lange Zeit vorherzusagen exakt gleich Null**.

Nun fängt der Laplace'sche Dämon Feuer: "HA!"brüllt er, "**Ich** kann das aber! Denn **ich** kenne alle irrationalen Zahlen und Zustände ganz genau!"
Und nun kommt die Natur, die schon die ganze Zeit im Hintergrund gestanden und milde und verständnisvoll vor sich über uns gelächelt hat, nach vorne und sagt: "Leider nein! Die Unschärfe der Zustände ist eins von meinen Prinzipien!"Und von ihren Prinzipien läßt sie sich nie abbringen. Sie holt Werner Heisenberg, der ebenfalls dagestanden und zugeschaut hat und bittet ihn, kurz zu erklären:
"Nun,..."beginnt der alte Mann, "Es ist prinzipiell für ein Quantensystem nicht möglich, bestimmte Eigenschaften gleichzeitig exakt zu haben. Sie sind mit einer **Unschärfe** miteinander verbunden nach der Gleichung:

$$\Delta A \Delta B \quad \geq \quad < \left| \frac{i}{2}[A, B] \right| > \tag{62}$$

A und B sind kanonisch konjugierte Größen und leider gehören dazu auch Ort und Impuls. Und Ort und Impuls spannen den Phasenraum auf, in dem sich alle makroskopischen Zustände befinden. Und genau diese Größen sind gegeneinander unscharf. Tja..."
Der Laplace'sche Dämon wird rot, dann weiß, dann grün und schließlich setzt er sich zurück auf sein Canapé, zündet sich eine Zigarette an und meint: "War auch nur so 'ne Idee."

7 Fenster im Chaos

Nun lassen wir den Laplace'schen Dämon frustriert rauchen und verfolgen das Schicksal unserer Büffelherde weiter, der wir inzwischen noch mehr Unterstützung gegeben haben, also ihre Zuwachsrate über den chaotischen Wert r_∞ hinaus steigern. Plötzlich lichtet sich das Chaos und die ganze Herde wechselt die

[3]Dieses Wort wird beliebig oft benutzt!

Größe ihrer Population mit der Periode 6 !!! Was hat das nun schon wieder zu sagen?
Wenn wir den Bifurkationsbaum im Chaosbereich betrachten fallen uns gewisse *Konturen* auf. Es handelt sich um Abbildungen des stationären Punktes $\tilde{x}_0 = 0.5$. An den Punkten, wo sich diese sinusförmigen Konturen kreuzen, vereinigen sich die Chaosbänder und an den Punkten, wo sie die Ränder des Intervalls berühren *öffnet sich ein Fenster* mit einer Dreier-Periode! Nun geht das ganze Speil wieder los: die Dreierperiode verdoppelt sich im selben Skalierungsverhältnis δ, vervierfacht, verachtfacht sich und ziemlich bald herrscht wieder Chaos. Es tauchen wieder Konturen auf, die sich wieder kreuzen und schließlich wieder die Ränder berühren und dann öffnet sich *ein weiteres Fenster* mit der Periode 5! Und später dann noch eins mit der Periode 3!
Die Mathematiker *T.-Y. Li* und *J. A. Yorke* konnten zeigen[4], daß ein System, welches ein Dreier-periodisches Verhalten aufweist, ebenfalls *alle anderen* Perioden aufweisen muß, inklusive der Periode ∞, also dem Chaos. Das ist sicherlich ein schwerer Schlag für den Laplace'schen Dämon, der noch etwas tiefer in sein Sofa sinkt und so tut, als höre er überhaupt nicht hin.

8 Bad End

Es gibt noch eine Pointe in der Geschichte mit der Büffelherde:
Wenn wir die Konditionen für die Büffel noch weiter verbessern, ihre Zuwachsrate bis *über* den Wert $r_{krit} = 4$ steigern, dann passiert etwas Unerwartetes: die Population stirbt plötzlich aus.
Dies zeigt sich numerisch in unserer Gleichung darin, daß der Wert *unbegrenzt sinkt*, also gegen das negativ Unendliche strebt. Das heißt für unsere Büffel: ihre Tage sind gezählt.
Wir schauen auf unsere Insel und können unseren Augen nicht trauen: Obwohl wir alles richtig gemacht haben, obwohl wir die Bedingungen für die Büffel immer verbessert haben, sind sie unerwartet ausgestorben, und zwar **ohne ersichtlichen Grund**!
Mir fällt eine Parallele dazu ein:
Man weiß bis heute nicht, *warum* in der erdgeschichtlichen Frühzeit die Dinosaurier ausgestorben sind. Manche vermuten einen Kometen, der die Erde getroffen hat, andere die Verlagerung der Erdachse, andere eine klimatische Katastrophe, andere den Einfluß von Außerirdischen und so weiter und so fort. Dabei hatten die Dinosaurier es unglaublich gut: sie waren sehr lebenstüchtig, zwar riesig und schwer, aber ihrer Umwelt auf dennoch aufs höchste angepaßt und nach Darwin also *super-fit*. Trotzdem sind sie in unglaublich kurzer Zeit ausgestorben und kein Mensch weiß warum. Wenn wir die Population unserer Büffel betrachten, dann kommt uns das nicht mehr seltsam vor. Sie waren einfach *zu lebenstüchtig*. Der Attraktor, der ihre Artenpopulation bestimmt hat, verwandelte sich schlagartig in einen generellen Repulsor und hat sie von der Oberfläche der Erde vertrieben.
Mir fällt noch eine Parallele ein: der Mensch.
Wir sind so lebenstüchtig wie noch niemals zuvor und unsere Zuwachsrate ist enorm hoch im Vergleich zu allen anderen Tierarten. Medizinische Versorgung und technische Entwicklung schützen uns gegen alle natürlichen Feinde und gegen fast alle lebensfeindlichen Umgebungen und Krankheiten. Was ist, wenn wir den Parameter K, die Kapazität unseres Planeten, der für uns wie die Insel für die Büffel ist, längst überschritten haben? Was droht uns, obwohl wir mit jedem Jahr neue, wesentliche *Verbesserungen* der Lebensqualität entwickelt haben? Wer berechnet den Attraktor *unserer Zivilisation*? Oder ist er bereits zum *Repulsor* geworden?

[4]T.-Y. Li und J. A. Yorke: "Period three implies chaos" Am. math. monthly **82** 985-992

Inhaltsverzeichnis